Канат в изогнутой трубке

Задача 4. [Росатом 2025/26, 11 класс, задача 4] Тонкая гладкая трубка изогнута в виде двух половинок окружностей радиуса R и закреплена в вертикальной плоскости. В трубке движется гибкий массивный канат длиной $2\pi R$. Найти ускорение каната в тот момент времени, когда он оказывается в положении, показанном на рисунке. Найти все точки каната, в которых сила его натяжения в этот момент равна нулю? Трение между канатом и внутренней поверхностью трубки отсутствует. Считайте, что ускорение каната — это составляющая ускорения всех его точек, параллельная самому канату в этих точках.

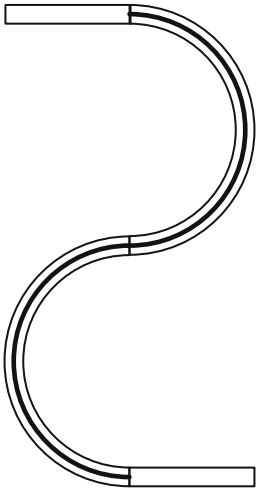


Рисунок условия

▲ **Решение.** **Что происходит.** Канат длиной $2\pi R$ заполняет всю трубку, поэтому все его точки движутся с одной скоростью v и имеют одно и то же ускорение вдоль трубки. Реакция гладкой трубки перпендикулярна движению и работы не совершает, работает только сила тяжести. Главная идея: ускорение находим из энергии при малом сдвиге каната, а нулевое натяжение — мысленно разрезав канат: без натяжения обе части движутся только под действием тяжести, и это возможно лишь при определённом положении разреза.

Обозначения. m — масса каната, $\lambda = m/(2\pi R)$ — масса единицы его длины, a — ускорение вдоль трубки. Верхний конец каната на $2R$ выше середины «S» (точки N на рисунке ниже), а нижний — на $2R$ ниже: перепад высот между концами $4R$.

Пункт 1. Ускорение каната.

1. Малый сдвиг. За малое время dt канат смещается вдоль себя на $dl = v\,dt$. Положение всех промежуточных участков повторяет прежнее, меняется лишь одно: с верхнего конца исчез кусок длиной dl, а у нижнего конца появился такой же. Масса куска $dm = \lambda\,dl = \dfrac{dl}{2\pi R}\,m$, он опустился на $4R$, поэтому потенциальная энергия каната убыла на

$$d\Pi = dm\,g\cdot 4R = \frac{2}{\pi}\,mg\,dl = \frac{2}{\pi}\,mg\,v\,dt.$$

2. Закон изменения кинетической энергии каната. Нормальные реакции трубки работы не совершают, трения нет, и вся убыль потенциальной энергии идёт в кинетическую: $K = \frac{1}{2}mv^2$, $dK = mv\,dv$. Приравняем $dK = d\Pi$:

$$mv\,dv = \frac{2}{\pi}\,mg\,v\,dt \quad\Rightarrow\quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{\pi}\,g \approx 0{,}64\,g.$$

Обратите внимание: речь об ускорении вдоль трубки; центростремительная составляющая, зависящая от v^2, здесь не нужна.

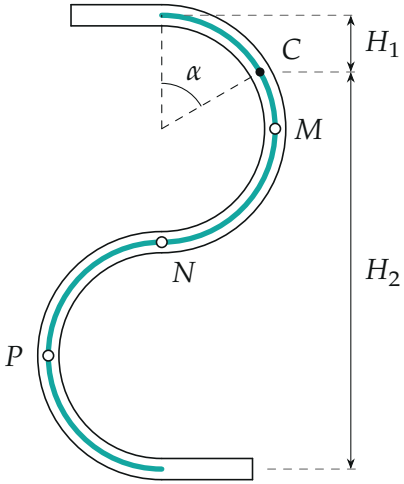
Пункт 2. Точки с нулевым натяжением.

3. Мысленный разрез. Возьмём кусок каната длиной L, верхний конец которого выше нижнего на H. Сумма проекций силы тяжести на трубку равна $\lambda g\sum dh = \lambda g H$ (для малого участка $\lambda g\sin\varphi\,ds = \lambda g\,dh$). Если натяжения на концах куска нет, второй закон Ньютона вдоль трубки даёт $\lambda L\,a_k = \lambda g H$, то есть $a_k = gH/L$.

Разрежем канат в точке C на верхний и нижний куски (длины L_1, L_2, перепады высот H_1, H_2; $L_1 + L_2 = 2\pi R$, $H_1 + H_2 = 4R$). Если натяжение в C равно нулю, верхний кусок движется только под действием тяжести с ускорением $a = 2g/\pi$ из пункта 1, то есть $gH_1/L_1 = a$. Обратно: из $H_1/L_1 = 2/\pi$ следует $T = \lambda L_1 a - \lambda g H_1 = 0$. Условие нулевого

натяжения:

$$\frac{H_1}{L_1} = \frac{2}{\pi}.$$



Канат в трубке. Разрез в точке C на угловом расстоянии α от верхней точки; $H_1 = R(1-\cos\alpha)$, $H_2 = R(3+\cos\alpha)$. Отмечены M, N, P из ответа

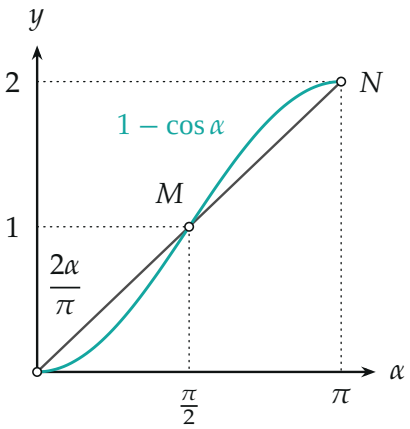
4. Разрез на верхней полуокружности ($0 < \alpha \le \pi$, угол отсчитан от верхней точки по ходу каната). Верхний кусок: $L_1 = \alpha R$ и $H_1 = R(1-\cos\alpha)$. Условие $H_1/L_1 = 2/\pi$ превращается в

$$1 - \cos\alpha = \frac{2}{\pi}\alpha.$$

Подставим: $\alpha = 0$ даёт $0 = 0$ (это сам конец каната); $\alpha = \pi/2$ даёт $1 = 1$; $\alpha = \pi$ даёт $2 = 2$. Других корней нет: у $f(\alpha) = 1 - \cos\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}$ вторая производная $f'' = \cos\alpha$, на $(0, \pi/2)$ функция выпукла, на $(\pi/2, \pi)$ вогнута, и на концах каждого промежутка она равна нулю, поэтому внутри не обращается в нуль. Графически — косинусоида $1-\cos\alpha$ и прямая $y = 2\alpha/\pi$ пересекаются ровно в трёх точках (рисунок ниже).

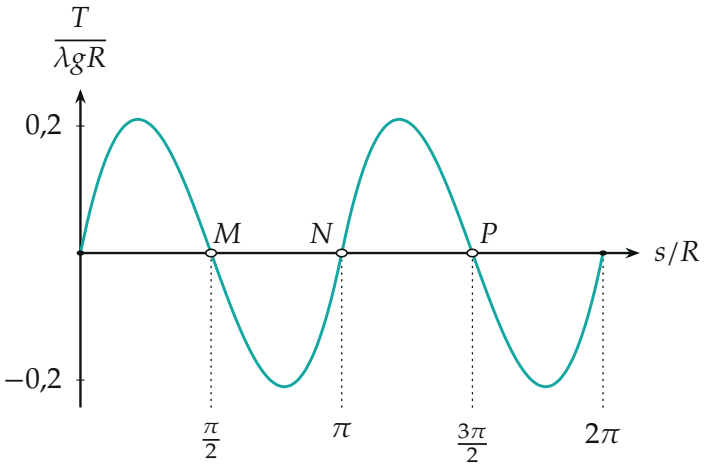
5. Разрез на нижней полуокружности. Теперь угол β отсчитываем от её верхней точки N (то есть $\alpha = \pi + \beta$, $0 < \beta < \pi$). Верхний кусок содержит всю верхнюю полуокружность: $L_1 = (\pi + \beta)R$, а перепад

высот до разреза $H_1 = R(3 - \cos\beta)$. Условие $H_1/L_1 = 2/\pi$ даёт $3 - \cos\beta = 2 + 2\beta/\pi$, то есть то же уравнение $1 - \cos\beta = \dfrac{2\beta}{\pi}$ с корнями $\beta = 0,\ \pi/2,\ \pi$. Значение $\beta = 0$ повторяет точку N, $\beta = \pi/2$ — новая точка P (самая левая точка нижней полуокружности), $\beta = \pi$ — нижний конец каната.



Корни уравнения $1 - \cos\alpha = 2\alpha/\pi$*:* $\alpha = 0,\ \pi/2,\ \pi$ *(по вычисленным точкам)*

Проверка. Подставим найденные точки в условие $H_1/L_1 = 2/\pi$. Для M: $H_1 = R$, $L_1 = \pi R/2$, отношение $2/\pi$; для N: $H_1 = 2R$, $L_1 = \pi R$; для P: $H_1 = R(3-0) = 3R$, $L_1 = \frac{3}{2}\pi R$ — везде $2/\pi$. Ускорение $a = 2g/\pi < g$, как и должно быть для каната на изогнутой трубке. Натяжение вдоль каната, $T = \lambda L_1 a - \lambda g H_1$, построено на рисунке ниже: нули стоят ровно в M, N, P и на концах.



Натяжение вдоль каната по формуле $T = \lambda L_1 a - \lambda g H_1$ (по вычисленным точкам): s — расстояние от верхнего конца, T в единицах $\lambda g R$; нули в M, N, P и на концах

Обратите внимание: на участках MN и от P до нижнего конца натяжение выходит *отрицательным* — канат там не растянут, а сжат: часть, идущая сзади, толкает часть впереди. Это следствие самой модели условия, в которой весь канат движется как одно целое с ускорением a. Сжатие такой канат может передавать, только пока тонкая трубка не даёт ему выгнуться вбок (как столбик бусин в трубке). Настоящая мягкая верёвка сжатия не держит: на этих участках она собралась бы складками, и движение «одним целым» нарушилось бы. Условие спрашивает лишь, где натяжение равно нулю, и в принятой модели это M, N, P.

Физический смысл: на весь канат перепад высот $4R$ приходится на длину $2\pi R$, то есть $2/\pi$ на единицу длины. Ровно такое же отношение должно быть у верхней части каната в точке, где натяжения нет.

Ответ. $a = \dfrac{2}{\pi} g \approx 0{,}64\, g$. Натяжение равно нулю в точках M (правая точка верхней полуокружности), N (стык полуокружностей) и P (левая точка нижней полуокружности); кроме них — только на свободных концах каната.