Заряженный маятник в вертикальном магнитном поле

Задача 5. [Росатом 2025/26, 11 класс, задача 5] Точечное заряженное зарядом q тело массой m, подвешенное на длинной нитке длиной l, совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Амплитуда колебаний — r. Этот маятник находится в вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (см. рисунок). Считая, что за время одного полупериода колебаний плоскость колебаний поворачивается на очень малый угол, найти время, за которое плоскость колебаний маятника совершит полный оборот.

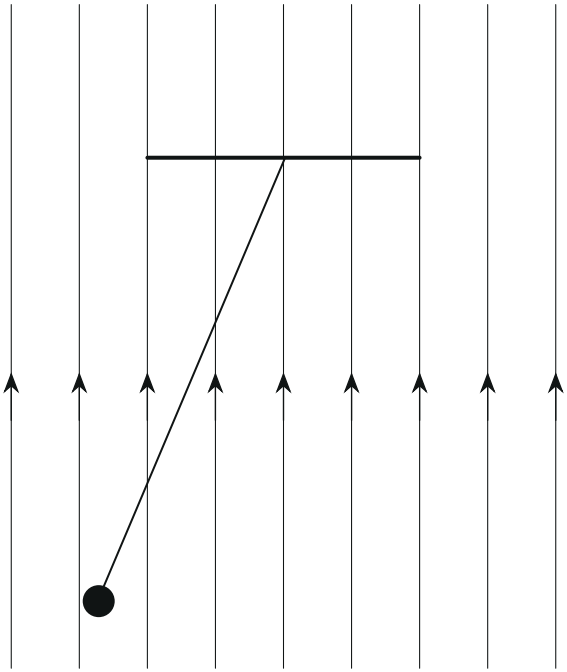
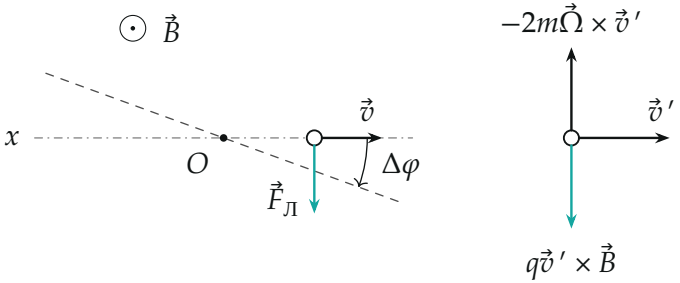


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Без поля маятник колеблется в одной плоскости. Вертикальное поле действует только на горизонтальную составляющую скорости: сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ перпендикулярна скорости, лежит в горизонтальной плоскости и отклоняет движение всё в одну и ту

же сторону — как при ходе вперёд, так и при ходе назад. Поэтому плоскость колебаний медленно поворачивается, как у маятника Фуко. Главная идея: перейти в систему отсчёта, вращающуюся вокруг вертикали так, что сила Лоренца в ней уравновешена силой Кориолиса; в такой системе маятник колеблется в неподвижной плоскости.

Обозначения. Ось z направлена вверх вдоль $\vec{B}$; смотрим на маятник сверху. $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ — частота маятника. Система K' вращается вокруг вертикали с угловой скоростью Ω (проекция на z; для $qB > 0$ получится $\Omega < 0$, вращение по часовой стрелке). Подъёмом маятника при колебаниях пренебрегаем.



Слева: вид сверху ($\vec{B}$ направлено к нам); штрихпунктир — плоскость колебаний, пунктир — она же спустя малое время. Справа: во вращающейся системе силы, действующие на тело, взаимно уничтожаются

1. Закон движения во вращающейся системе. В K' второй закон Ньютона для маятника содержит, кроме реальных сил, силу Кориолиса $-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,'$ и центробежную силу $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$, где $\vec{v}\,'$ — скорость относительно K', $\vec{r}$ — горизонтальное смещение от оси. Скорость в неподвижной системе $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\Omega}\times\vec{r}$, поэтому сила Лоренца равна $q\vec{v}\,'\times\vec{B} + q(\vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{B}$. Первое слагаемое и сила Кориолиса пропорциональны $\vec{v}\,'\times\hat{z}$:

$$q\vec{v}\,'\times B\hat{z} - 2m\Omega\,\hat{z}\times\vec{v}\,' = (qB + 2m\Omega)\,\vec{v}\,'\times\hat{z}.$$

Они взаимно уничтожаются при

$$\Omega = -\frac{qB}{2m}.$$

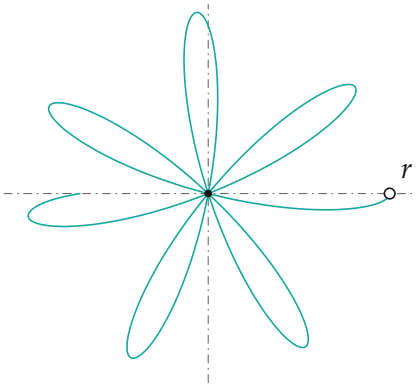
2. Что остаётся. Остальные два слагаемых, $q(\vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{B} = -2m\Omega^2\vec{r}$ (с учётом $qB = -2m\Omega$) и центробежная сила $+m\Omega^2\vec{r}$, вместе дают $-m\Omega^2\vec{r}$: добавку к возвращающей силе $-m\omega_0^2\vec{r}$. В системе K' горизонтальное движение — колебания с частотой $\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2} \approx \omega_0$, потому что по условию за полупериод плоскость поворачивается на малый угол: $|\Omega|\,T \ll 1$, то есть $|\Omega| \ll \omega_0$. Значит, в K' маятник колеблется в неподвижной плоскости.

3. Возврат в лабораторную систему. Система K' сама вращается относительно лаборатории с угловой скоростью $|\Omega| = \dfrac{qB}{2m}$, а плоскость колебаний неподвижна в K'. Значит, в лаборатории плоскость поворачивается с той же угловой скоростью $\Omega_{\text{пл}} = \dfrac{qB}{2m}$ — по часовой стрелке при $qB > 0$. Полный оборот плоскости — поворот на угол 2π, поэтому

$$t = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{пл}}} = \frac{4\pi m}{qB}.$$

Обратите внимание: в официальном решении угловой скоростью поворота плоскости названа qB/m — это скорость поворота *вектора скорости* под действием силы Лоренца, а плоскость поворачивается вдвое медленнее (второй способ — в проверке ниже). Поэтому там получено $2\pi m/(qB)$; на самом деле за это время плоскость поворачивается лишь на π — впервые совпадает с исходной, но маятник отклоняется уже в противоположную сторону.

Проверка. Второй способ — прямой расчёт без вращающейся системы. Пусть x — смещение вдоль плоскости, y — поперёк, $\omega_c = qB/m$. Сила Лоренца даёт поперечную силу $-qBv_x$, поэтому $\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\omega_c\dot{x}$. Для $x = r\cos\omega_0 t$ правая часть равна $\omega_c r\omega_0 \sin\omega_0 t$ — резонанс, и $y = -\dfrac{\omega_c t}{2}\,x$. Отношение $y/x = -\omega_c t/2$ есть малый угол поворота плоскости, то есть $\Omega_{\text{пл}} = qB/(2m)$ — как и выше (численный расчёт уравнений движения даёт то же). Размерность: $m/(qB)$ — время.



Траектория маятника на виде сверху за время поворота плоскости на π. Взято $|\Omega|/\omega_0 = 0{,}16$ для наглядности (в задаче оно гораздо меньше)

Физический смысл: скорость поворачивается с угловой скоростью qB/m, а плоскость — вдвое медленнее, потому что в поворот плоскости входит только часть толчка, совпадающая по фазе с колебанием: среднее $\sin^2 \omega_0 t$ равно $\frac{1}{2}$.

Ответ. $t = \dfrac{4\pi m}{qB}$: плоскость поворачивается с угловой скоростью $\Omega_{\text{пл}} = \dfrac{qB}{2m}$. (В официальном ответе $2\pi m/(qB)$: там угловая скорость поворота плоскости взята вдвое большей, qB/m; за $2\pi m/(qB)$ плоскость поворачивается лишь на π.)