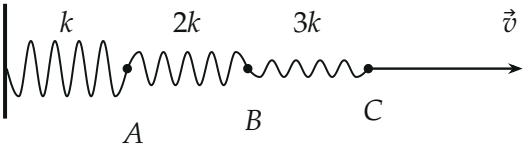
Три пружины и точки соединения

Задача 1. [Росатом 2025/26, 7 класс, задача 3] Три пружины одинаковой длины соединены так, как показано на рисунке. Коэффициенты жёсткости пружин равны k, $2k$ и $3k$. За конец пружины (точку C; см. рисунок) тянут так, что он перемещается с постоянной скоростью $\vec{v}$ из положения, в котором пружины недеформированы. Найти скорости точек соединения пружин (A и B на рисунке). Считать, что закон Гука работает для любых удлинений пружин, а масса пружин равна нулю.



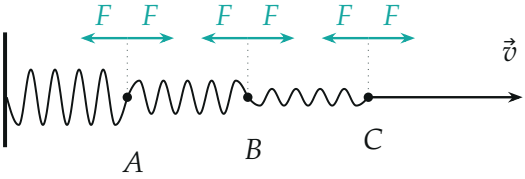
▲ **Решение.** **Что происходит.** Цепочка пружин одна, и тянут её за конец. Пружины невесомые, поэтому через каждую передаётся одна и та же сила, а растягиваются они по-разному: мягкая — сильнее, жёсткая — слабее. Удлинения растут равномерно, значит, и точки A, B сдвигаются равномерно. Нужно разделить перемещение конца C между тремя пружинами в отношении, обратном их жёсткостям.

Обозначения. Ось x вдоль цепочки вправо. F — общая сила упругости, x_1, x_2, x_3 — удлинения пружин k, $2k$, $3k$ к моменту t, x_A, x_B — перемещения точек A, B, v_A, v_B — их скорости.

1. Сила в пружинах одна и та же. Точка соединения A невесома, поэтому второй закон Ньютона для неё в проекции на ось x даёт $F_2 - F_1 = m_A a_A = 0$: вторая пружина тянет её вправо с той же силой, с какой первая тянет влево. То же для B. Значит, все три пружины натянуты одной силой F.

2. Удлинения через силу. Закон Гука для каждой пружины: $F = kx_1 = 2k\,x_2 = 3k\,x_3$. Отсюда

$$x_1 = \frac{F}{k}, \qquad x_2 = \frac{F}{2k}, \qquad x_3 = \frac{F}{3k}.$$



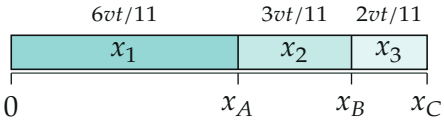
Силы, приложенные к точкам A, B, C (стрелки подняты над пружинами, точки приложения отмечены пунктиром): точку соединения тянут в разные стороны равные силы F; к C справа приложена внешняя сила F

3. Перемещение конца C. Точка C сместилась на сумму удлинений всех трёх пружин (левый конец цепочки закреплён): $x_1 + x_2 + x_3 = vt$. Подставляем:

$$\frac{F}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}\frac{F}{k} = vt \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{k} = \frac{6}{11}vt.$$

Следовательно

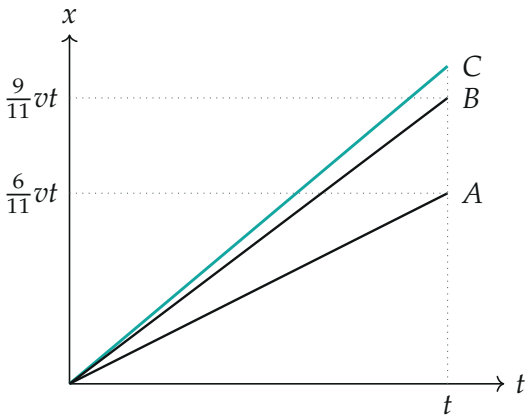
$$x_1 = \frac{6}{11}vt, \qquad x_2 = \frac{3}{11}vt, \qquad x_3 = \frac{2}{11}vt.$$



Перемещение vt конца C делится между пружинами в отношении $6 : 3 : 2$ (обратно пропорционально жёсткостям)

4. Скорости точек. Точка A сместилась на $x_A = x_1 = \frac{6}{11}vt$, точка B — на $x_B = x_1 + x_2 = \frac{9}{11}vt$. Перемещения растут пропорционально времени, поэтому скорости постоянны:

$$v_A = \frac{x_A}{t} = \frac{6}{11}v, \qquad v_B = \frac{x_B}{t} = \frac{9}{11}v.$$



Перемещения точек A, B, C растут линейно со временем; наклон прямой — скорость: 6/11, 9/11 и 1 от v

Обратите внимание.

- Скорости v_A и v_B разные, хотя пружины соединены: расстояния между точками меняются, потому что пружины растягиваются.
- Точка B сдвигается на сумму удлинений двух пружин слева от неё ($x_B = x_1 + x_2$), а не одной.
- Длина пружин и их число витков в ответ не входят: важны только жёсткости.

Проверка.

- Размерность: коэффициенты 6/11 и 9/11 безразмерны, скорости — в единицах v.
- Второй способ: общая жёсткость последовательных пружин $\dfrac{1}{k_{\text{общ}}} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{3k} = \dfrac{11}{6k}$, то есть $k_{\text{общ}} = \dfrac{6k}{11}$ и $F = k_{\text{общ}}\, vt$. Удлинение первой пружины $x_1 = F/k = \dfrac{6}{11}\, vt$ — как и выше.
- Порядок: $v_A < v_B < v$, как должно быть для точек вдоль цепочки, у которой левый конец неподвижен; сумма удлинений $\dfrac{6+3+2}{11} = 1$.

Смысл: перемещение конца делится между пружинами обратно пропорционально жёсткостям, а скорость каждой точки равна скорости конца,

умноженной на долю перемещения, накопленную слева от неё.

Ответ. $v_A = \dfrac{6}{11}\,v; \quad v_B = \dfrac{9}{11}\,v.$