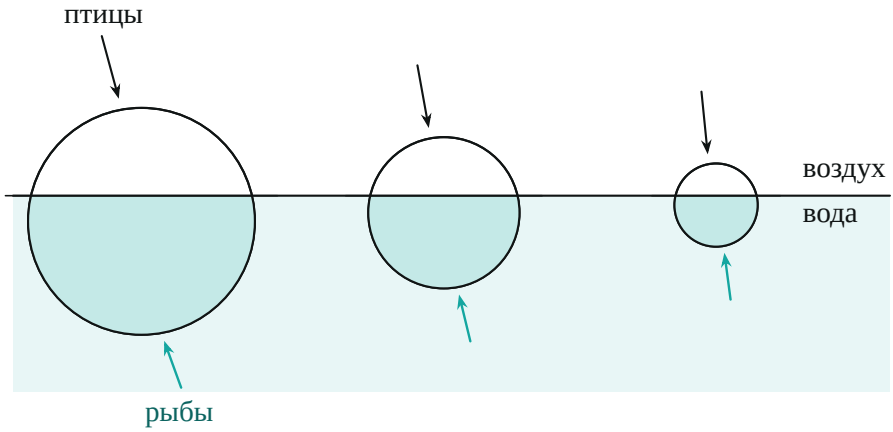
Яблоко плывёт по реке

Задача 1. [Росатом 2025/26, 8 класс, задача 2] По реке плывёт яблоко, выступающее из воды на одну третью часть своего объёма. Ту часть яблока, которая находится в воде, кусают рыбы. Одновременно с ними ту часть яблока, которая находится на воздухе, клюют птицы. Известно, что птицы поедают яблоко со скоростью в три раза большей, чем рыбы. Яблоко было съедено до конца. Какую часть яблока съели птицы, а какую рыбы? Найти также плотность яблока, если плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3. Считать, что яблоко однородно.

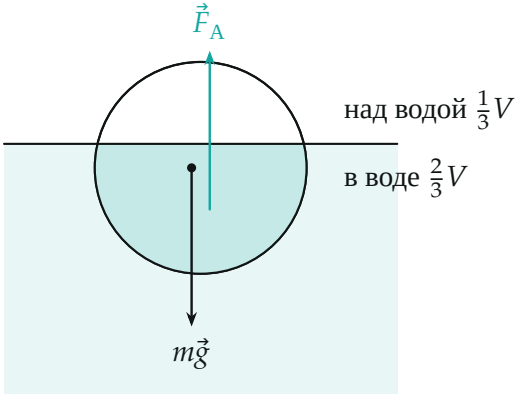
▲ **Решение. Что происходит.** Яблоко плавает, потому что его плотность меньше плотности воды, и на воздухе остаётся ровно та часть объёма, которая нужна для равновесия. Главная идея: эта доля зависит только от плотностей, но не от размера яблока. Поэтому, сколько бы яблока ни съели, оставшаяся часть всё равно плавает так, что под водой $\frac{2}{3}$ её объёма, над водой $\frac{1}{3}$. Рыбам и птицам всегда есть что есть, и они едят одновременно до самого конца. Тогда съеденное каждым пропорционально скорости.



Яблоко по мере поедания (форму для рисунка взяли шаром): над водой всегда $\frac{1}{3}$ его объёма. Птицы кусают верхнюю часть, рыбы — нижнюю.

Обозначения. V — объём яблока, M — его масса, ρ — плотность яблока, ρ_0 — плотность воды, u — масса яблока, которую рыбы съедают за единицу времени, $3u$ — то же для птиц, T — время, за которое яблоко съедено целиком.

1. Плотность яблока. На яблоко действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и сила Архимеда $\vec{F}_\text{A}$ вверх; других сил нет. Яблоко плавает в покое, значит, они равны. Сила Архимеда равна весу вытесненной воды, а вытесненный объём — это объём погружённой части, $\frac{2}{3}V$.



Второй закон Ньютона для яблока в проекции на вертикальную ось (покой):

$$F_\text{A} - mg = 0, \qquad \rho_0 g \cdot \tfrac{2}{3}V = \rho V g.$$

Отсюда

$$\rho = \tfrac{2}{3}\rho_0 = \tfrac{2}{3} \cdot 1 \text{ г/см}^3 \approx 0{,}67 \text{ г/см}^3.$$

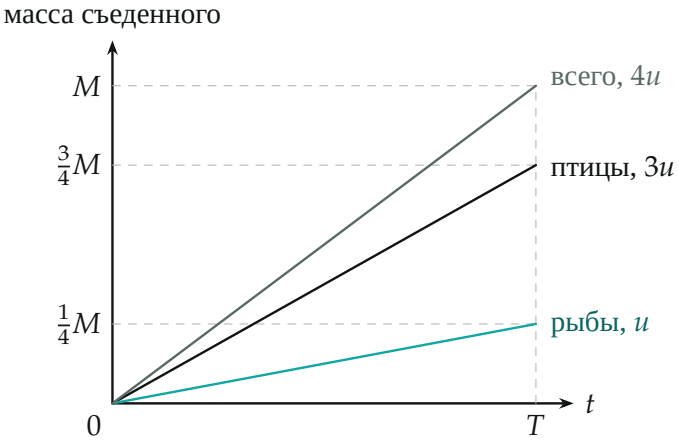
2. Доля под водой не меняется при поедании. Откусываем часть яблока: оставшаяся часть по-прежнему однородна, плотность та же. Условие плавания для любого её объёма V' даёт тот же результат: $\rho_0 \cdot x\, V' = \rho V'$, где x — доля погружённого объёма, то есть $x = \rho/\rho_0 = \frac{2}{3}$. Значит, и после поедания какой угодно части яблока над водой $\frac{1}{3}$ его объёма, под водой $\frac{2}{3}$: птицам и рыбам не мешает ни то, что другой уже съел, ни положение яблока в воде.

Обратите внимание: доли съеденного не равны долям объёма ($\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$). Объём над водой и под водой после каждого укуса восстанавливается:

яблоко перевернётся или осядет, и птицам снова достанется $\frac{1}{3}$ оставшегося. Ответ определяют только скорости поедания.

3. Сколько съел каждый. За время T рыбы съедают uT, птицы $3uT$. Яблоко съедено целиком, поэтому сумма равна его массе:

$$uT + 3uT = M \quad \Rightarrow \quad uT = \frac{M}{4}.$$



Рыбы съели $\frac{M}{4}$, то есть четверть яблока, птицы $3uT = \frac{3M}{4}$ — три четверти. Яблоко однородное, поэтому доли массы и объёма одинаковы.

Проверка. Доли в сумме дают единицу: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Отношение съеденного птицами и рыбами 3 : 1 равно отношению скоростей. Предельные случаи: если птицы едят не втрое, а так же быстро, как рыбы, каждый съедает половину; если птиц нет, рыбы съедают всё. Плотность 0,67 г/см^3 меньше плотности воды, как и нужно для плавания. Смысл: ответ определяет не геометрия, а то, что оба едока работают на протяжении всего времени.

Ответ. Рыбы съели $\frac{1}{4}$ яблока, птицы — $\frac{3}{4}$; плотность яблока $\rho = \frac{2}{3}\rho_0 \approx$ 0,67 г/см^3.