Муравей на периметре квадрата

Задача 1. [Росатом 2025/26, 8 класс, задача 4] Вдоль периметра квадрата с постоянной по величине скоростью бежит муравей. Оказалось, что через время t после начала движения муравья из одной из вершин квадрата величина средней скорости муравья в 2 раза меньше его скорости. Найти скорость муравья, если длина стороны квадрата равна a.

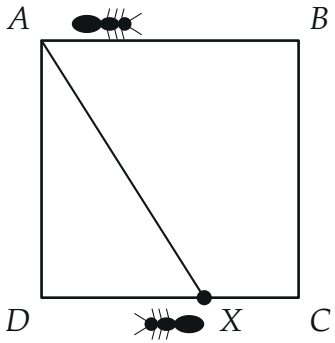
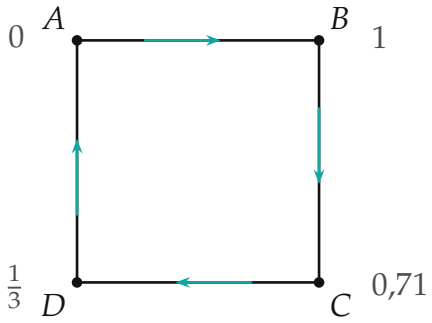


Рисунок организаторов: A — вершина старта, X — положение муравья через время t.

▲ **Решение. Что происходит.** Средняя скорость и скорость — разные величины. Скорость v показывает, как быстро муравей пробегает путь, а средняя скорость $v_{\text{ср}}$ — как быстро он удаляется от старта: это модуль перемещения (отрезок AX от начала до конца), делённый на время. Путь по периметру не короче прямой, поэтому $v_{\text{ср}} \le v$, и равны они, пока муравей бежит по первой стороне. Главная идея: отношение $v_{\text{ср}}/v = AX/s$ (перемещение к пути) меняется вдоль периметра, и нужно найти место, где оно равно $1/2$.

Обозначения. $s = vt$ — путь по периметру, A — вершина старта, дальше по ходу B, C, D (муравей бежит $A \to B \to C \to D \to A$; в другую сторону картина зеркальна). Отношение $\dfrac{v_{\text{ср}}}{v} = \dfrac{AX/t}{s/t} = \dfrac{AX}{s}$ — время сокращается.

1. На какой стороне муравей. Вычислим AX/s в вершинах.



Числа у вершин — отношение $v_{ср}/v$ при попадании муравья в эту вершину.

В B: $AB = a$, $s = a$, отношение 1. В C: $AC = \sqrt{2}\,a$, $s = 2a$, отношение $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$. В D: $AD = a$, $s = 3a$, отношение $\dfrac{1}{3}$. Вернувшись в A ($s = 4a$), муравей имеет нулевое перемещение.

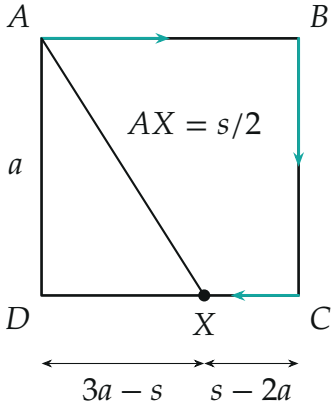
На стороне AB перемещение равно пути, отношение 1 — не подходит. На BC отношение лежит между 1 и 0,71, на CD — между 0,71 и 0,33, на DA — между 0,33 и 0. Значение 0,5 попадает в промежуток CD и только в него. Вдоль всего первого круга отношение не возрастает (путь растёт, а перемещение после B только уменьшается или растёт медленнее пути), поэтому решение на CD единственное.

Обратите внимание: на следующих кругах отношение ещё меньше. Перемещение не больше диагонали $\sqrt{2}\,a$, а путь больше $4a$, поэтому $AX/s < \sqrt{2}/4 \approx 0{,}35 < \frac{1}{2}$. Значит, подходит только первый круг.

2. Уравнение для пути. Пусть X лежит на стороне CD (рисунок). Путь до D равен $3a$, поэтому $DX = 3a - s$, а $AD = a$ перпендикулярно DX. Теорема Пифагора для треугольника ADX:

$$AX^2 = a^2 + (3a - s)^2.$$

По условию $v_{\text{ср}} = v/2$, то есть $AX = s/2$.



Подставляем:

$$\frac{s^2}{4} = a^2 + (3a - s)^2 \quad \Rightarrow \quad 3s^2 - 24as + 40a^2 = 0.$$

$$s = \frac{24a \pm \sqrt{576a^2 - 480a^2}}{6} = \frac{24 \pm 4\sqrt{6}}{6}\,a = \left(4 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)a.$$

Муравей на стороне CD, то есть $2a \le s \le 3a$: подходит только знак «минус». Корень со знаком «плюс», $\approx 5{,}6\,a$, лежит за пределами первого круга, где решений нет.

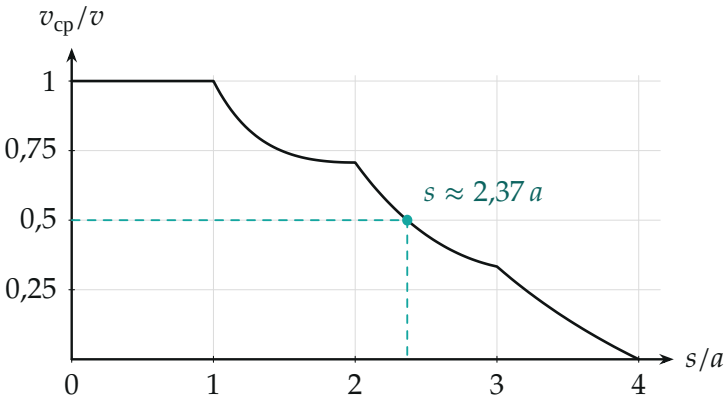


График $v_{ср}/v$ в зависимости от пути s: решение — точка, где кривая пересекает уровень $\frac{1}{2}$.

3. Скорость. Муравей пробежал путь $s = vt$, поэтому

$$v = \frac{s}{t} = \left(4 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\frac{a}{t} \approx 2{,}37\,\frac{a}{t}.$$

Проверка. Подставим $s \approx 2{,}367\,a$: $DX = 3a - s = 0{,}633\,a$, $AX = \sqrt{a^2 + 0{,}633^2 a^2} \approx 1{,}184\,a$, и $s/2 = 1{,}1835\,a$ — равенство выполнено. Размерность: a/t — скорость. Смысл: муравей пробежал чуть больше двух сторон, а прямое расстояние от старта до него вдвое меньше пройденного пути.

Ответ. $v = \left(4 - \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)\dfrac{a}{t} \approx 2{,}37\,\dfrac{a}{t}$.