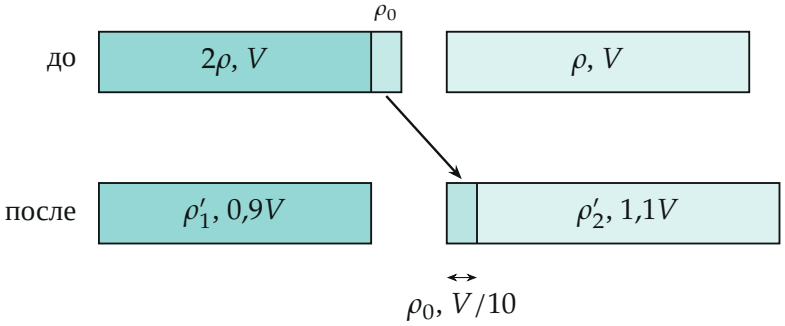
Куски глины разной плотности

Задача 1. [Росатом 2025/26, 8 класс, задача 5] Из глины, представляющей собой смесь глин из различных месторождений, сделали два тела одинаковых объёмов с сильно изменяющейся от точки к точке плотностью. Одно тело имеет среднюю плотность 2ρ, второе тело — среднюю плотность ρ. От первого тела (со средней плотностью 2ρ) отрезают кусок с объёмом, равным одной десятой части объёма тел, и присоединяют его ко второму телу (со средней плотностью ρ). Возможна ли такая ситуация, когда средняя плотность и первого, и второго тела увеличится, причём на одну и ту же величину? Если нет, то объясните, почему. А если да, то найдите среднюю плотность этого кусочка. Объём тела, полученного соединением различных частей, равен сумме объёмов этих частей.

▲ **Решение. Что происходит.** Средняя плотность тела — это его масса, делённая на объём: $\bar{\rho} = m/V$. Тело неоднородное, поэтому внутри него есть участки и плотнее, и легче средней плотности. Если от тела отрезать кусок, *более лёгкий*, чем всё тело в среднем, то оставшаяся часть станет в среднем плотнее. Если тот же кусок присоединить к другому телу и он окажется *более плотным*, чем то тело, то и там средняя плотность вырастет. Значит, нужен кусок с плотностью между ρ и 2ρ; остаётся подобрать её так, чтобы приросты совпали.



Кусок объёма $V/10$ с плотностью ρ_0 переходит от первого тела ко второму

Обозначения. V — объём каждого тела, ρ_0 — средняя плотность отрезанного куска (объём $V/10$), ρ_1' и ρ_2' — средние плотности первого и второго тела после перекладывания, $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$ — их приросты.

1. Массы и объёмы до и после. Средняя плотность по определению равна массе тела, делённой на объём, значит, массы тел $m_1 = 2\rho V$ и $m_2 = \rho V$, масса куска $m_0 = \rho_0 \cdot V/10$. Масса и объём составного тела складываются из масс и объёмов частей (объём — по условию). После перекладывания

$$m_1' = 2\rho V - \frac{\rho_0 V}{10}, \quad V_1' = \frac{9V}{10},$$
$$m_2' = \rho V + \frac{\rho_0 V}{10}, \quad V_2' = \frac{11V}{10}.$$

2. Новые средние плотности и их приросты. Делим массу на объём:

$$\rho_1' = \frac{m_1'}{V_1'} = \frac{2\rho - \rho_0/10}{9/10} = \frac{20\rho - \rho_0}{9},$$
$$\rho_2' = \frac{m_2'}{V_2'} = \frac{\rho + \rho_0/10}{11/10} = \frac{10\rho + \rho_0}{11}.$$

Приросты:

$$\Delta\rho_1 = \rho_1' - 2\rho = \frac{20\rho - \rho_0 - 18\rho}{9} = \frac{2\rho - \rho_0}{9},$$
$$\Delta\rho_2 = \rho_2' - \rho = \frac{10\rho + \rho_0 - 11\rho}{11} = \frac{\rho_0 - \rho}{11}.$$

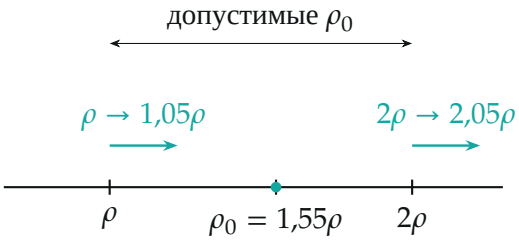
Плотность первого тела растёт ($\Delta\rho_1 > 0$), когда $\rho_0 < 2\rho$, плотность второго ($\Delta\rho_2 > 0$) — когда $\rho_0 > \rho$. Оба условия выполняются сразу при $\rho < \rho_0 < 2\rho$: так оно и должно быть по рассуждению выше.

3. Равенство приростов. По условию $\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2$:

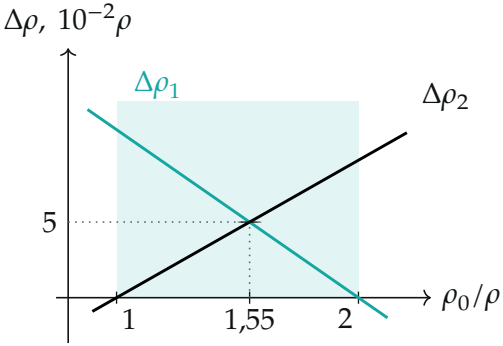
$$\frac{2\rho - \rho_0}{9} = \frac{\rho_0 - \rho}{11} \;\Rightarrow\; 11(2\rho - \rho_0) = 9(\rho_0 - \rho) \;\Rightarrow\; 31\rho = 20\rho_0,$$

$$\rho_0 = \frac{31}{20}\rho = 1{,}55\,\rho.$$

Это число лежит между ρ и 2ρ, поэтому ситуация **возможна**: кусок нужной плотности можно найти, ведь тело неоднородно.



Допустимая плотность куска лежит между плотностями тел; найденное $\rho_0 = 1{,}55\,\rho$ внутри этого промежутка



Приросты плотностей как функции ρ_0: оба положительны при $\rho < \rho_0 < 2\rho$ (заливка), равны в точке $\rho_0 = 1{,}55\,\rho$, где каждый равен $0{,}05\,\rho$

Обратите внимание.

- Складываются массы и объёмы, а не плотности. Плотность первого тела выросла, хотя оно потеряло массу: объём уменьшился на 10 %, а масса — на меньшую долю, $\rho_0/(20\rho) = 7{,}75\,\%$.
- Подходит не любой лёгкий кусок: при $\rho_0 \le \rho$ плотность второго тела не растёт.

Проверка.

- Размерность: ρ_0 выражается через ρ безразмерным множителем $31/20$.
- Подставим $\rho_0 = 1{,}55\,\rho$: $\rho_1' = (2 - 0{,}155)\rho/0{,}9 = 2{,}05\,\rho$ и $\rho_2' = (1 + 0{,}155)\rho/1{,}1 = 1{,}05\,\rho$ — оба прироста равны $0{,}05\,\rho$.
- Масса и объём в сумме не меняются: $0{,}9 \cdot 2{,}05\rho + 1{,}1 \cdot 1{,}05\rho = 3\rho$, то есть общая средняя плотность по-прежнему $1{,}5\,\rho$, как до перекладывания.

Смысл: кусок надо взять так, чтобы его «превосходство» над вторым телом ($\rho_0 - \rho$), делённое на новый объём $11V/10$ этого тела, равнялось его «лёгкости» относительно первого ($2\rho - \rho_0$), делённой на новый объём $9V/10$ первого.

Ответ. Да, возможна; средняя плотность кусочка $\rho_0 = \dfrac{31}{20}\,\rho = 1{,}55\,\rho$.