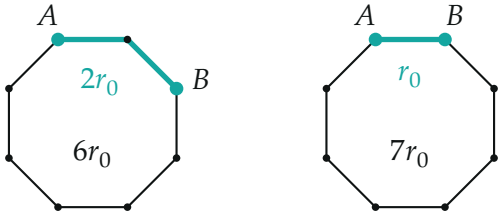
Проволочный восьмиугольник

Задача 1. [Росатом 2025/26, 9 класс, задача 1] Из куска провода сделали правильный восьмиугольник и приложили к двум вершинам, расположенным через одну, некоторое постоянное электрическое напряжение. Оказалось, что в восьмиугольнике выделяется мощность P_1. Какая мощность будет выделяться в восьмиугольнике, если то же самое напряжение приложить к двум его соседним вершинам?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Две вершины, к которым приложено напряжение, делят замкнутый провод на две дуги. Между этими вершинами дуги включены параллельно: ток течёт по обеим сразу. Провод однородный, поэтому сопротивление дуги пропорционально числу сторон в ней. Напряжение в обоих опытах одно и то же, значит, мощность $P = U^2/R$ обратно пропорциональна сопротивлению восьмиугольника, и нужно сравнить два сопротивления.

Обозначения. r_0 — сопротивление одной стороны; A, B — вершины, к которым приложено напряжение U; R_1 и R_2 — сопротивление между A и B в первом (вершины через одну) и во втором (соседние вершины) случаях.



Слева — вершины через одну: бирюзовая дуга в две стороны, остальные шесть сторон образуют вторую дугу. Справа — соседние вершины: короткая дуга в одну сторону, длинная в семь

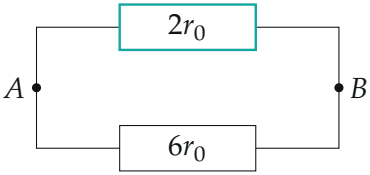
1. Вершины через одну. Короткая дуга состоит из двух сторон, соединённых последовательно, её сопротивление $2r_0$. Длинная дуга — шесть сторон, $6r_0$. Дуги включены параллельно между A и B, поэтому склады-

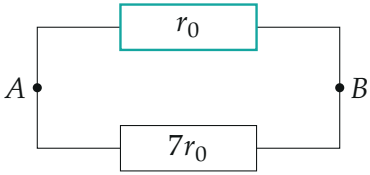
ваются их проводимости (величины, обратные сопротивлениям):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2r_0} + \frac{1}{6r_0} = \frac{2}{3r_0} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{3}{2}\,r_0.$$

2. Соседние вершины. Короткая дуга — одна сторона, r_0; длинная — остальные семь, $7r_0$. Снова параллельное соединение:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{7r_0} = \frac{8}{7r_0} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{7}{8}\,r_0.$$



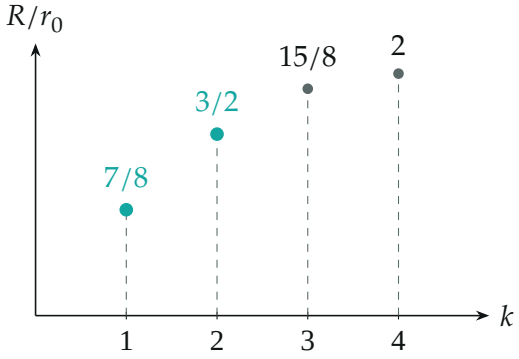


Эквивалентные схемы между A и B: две параллельные ветви. Слева $R_1 = 3r_0/2$, справа $R_2 = 7r_0/8$

3. Мощности. Напряжение приложено ко всему восьмиугольнику, поэтому по закону Джоуля — Ленца $P = U^2/R$ с сопротивлением R_1 или R_2:

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1}, \qquad P_2 = \frac{U^2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{3/2}{7/8} = \frac{12}{7}.$$

Обратите внимание: ток идёт по обеим дугам сразу, а сопротивление параллельного соединения всегда меньше сопротивления самой короткой ветви. Поэтому $R_1 < 2r_0$ и $R_2 < r_0$; при соседних вершинах короткая ветвь вдвое лучше пропускает ток, и мощность растёт.



Сопротивление восьмиугольника между вершинами, разделёнными k сторонами по короткой дуге: $R = k(8-k)\,r_0/8$. Бирюзовые точки — наши два случая

Проверка. Второй способ — сложить мощности ветвей: на каждую дугу подано полное напряжение U, поэтому

$$P_1 = \frac{U^2}{2r_0} + \frac{U^2}{6r_0} = \frac{2U^2}{3r_0}, \qquad P_2 = \frac{U^2}{r_0} + \frac{U^2}{7r_0} = \frac{8U^2}{7r_0},$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{8}{7}\cdot\frac{3}{2} = \frac{12}{7}$$

— совпадает. Общая картина (график): дуги из k и $8-k$ сторон параллельно дают $R = k(8-k)\,r_0/8$; при $k = 1$ и $k = 2$ это R_2 и R_1, а наибольшее сопротивление $2r_0$ — у противоположных вершин ($k = 4$), как и должно быть для двух равных ветвей по $4r_0$. Размерность: отношение мощностей безразмерно, U и r_0 сократились. Смысл: чем ближе вершины, тем короче одна из ветвей и тем меньше общее сопротивление, поэтому при соседних вершинах мощность больше в $12/7 \approx 1{,}7$ раза.

Ответ. $P_2 = \dfrac{12}{7}\,P_1$ (в $12/7 \approx 1{,}7$ раза больше).