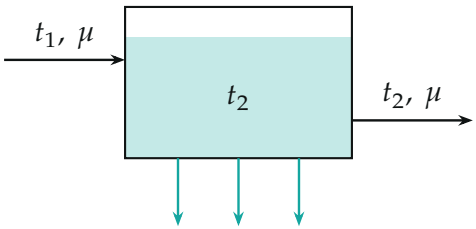
Проточный резервуар с горячей водой

Задача 1. [Росатом 2025/26, 9 класс, задача 3] В эксперименте по изучению теплообмена в проточный резервуар поступает вода, нагретая до температуры $t_1 = 50°C$. Такое же количество воды вытекает из резервуара. Через некоторое время после начала эксперимента в резервуаре устанавливается температура $t_2 = 35°C$. Какая установится температура в резервуаре, если в него подавать такое же количество воды, нагретой до температуры $t_3 = 90°C$? Температура в комнате $t_0 = 10°C$. Считать, что поступающая в резервуар вода успевает мгновенно перемешаться с водой, находящейся в резервуаре, а скорость теплообмена между телами пропорциональна разности их температур.

▲ **Решение. Что происходит.** Когда температура в резервуаре установилась, внутренняя энергия воды в нём не меняется. Втекает вода при t_1, а вытекает холоднее — при температуре резервуара t_2: часть тепла уходит через стенки в комнату, и эти потери пропорциональны разности температур резервуара и комнаты. Главная идея: в установившемся режиме тепло, принесённое водой, равно потерям в комнату; коэффициент потерь зависит от резервуара, но не от воды, поэтому он один и тот же в обоих опытах.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; μ — масса воды, втекающей (и вытекающей) в единицу времени; k — мощность теплопотерь при разности температур резервуара и комнаты в $1°C$; t_x — искомая температура.



Проточный резервуар: горячая вода втекает, вода температуры t_2 вытекает, бирюзовые стрелки — теплопотери через стенки

1. Первый опыт. За малый промежуток времени dt в резервуар втекает масса воды $\mu\,dt$ при t_1 и вытекает такая же масса при t_2 (вода мгновенно перемешивается, поэтому вытекает вода с температурой резервуара). Температура в резервуаре не меняется, поэтому тепло $c\mu\,dt\,(t_1 - t_2)$, отданное потоком, целиком уходит в комнату: $k(t_2 - t_0)\,dt$. Сократив dt, получаем уравнение теплового баланса:

$$c\mu\,(t_1 - t_2) = k\,(t_2 - t_0) \qquad \text{(только в установившемся режиме)}.$$

2. Второй опыт. Расход тот же, резервуар тот же, поэтому μ и k те же; меняется только температура притока:

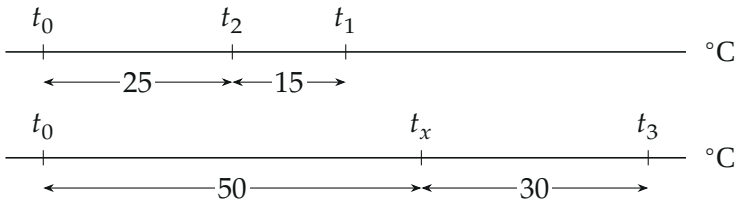
$$c\mu\,(t_3 - t_x) = k\,(t_x - t_0).$$

3. Решение. Неизвестных $c\mu$, k, t_x — три, а уравнений два, но $c\mu$ и k нужны только в отношении. Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_x} = \frac{t_2 - t_0}{t_x - t_0}.$$

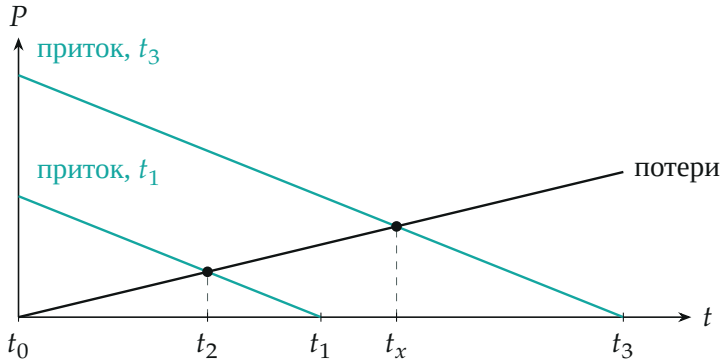
Обозначим $\theta = t_x - t_0$, тогда $t_3 - t_x = (t_3 - t_0) - \theta$, и перекрёстное умножение даёт $(t_1 - t_2)\,\theta = \big[(t_3 - t_0) - \theta\big](t_2 - t_0)$. Слагаемые с θ собираются в $\theta\,(t_1 - t_2 + t_2 - t_0) = \theta\,(t_1 - t_0)$, поэтому

$$t_x = t_0 + \frac{(t_3 - t_0)(t_2 - t_0)}{t_1 - t_0} = 10 + \frac{80 \cdot 25}{40} = 60^\circ\text{C}.$$



Два опыта на одной шкале температур (числа — в градусах). Отрезки от комнаты до резервуара и от резервуара до притока делят шкалу в одном отношении $25 : 15 = 50 : 30 = 5 : 3$

4. Графики. Тепло, принесённое водой в единицу времени, $c\mu\,(t_{\text{пр}} - t)$ убывает с ростом температуры резервуара t, потери $k\,(t - t_0)$ растут. Установившаяся температура — точка, где они равны.



Мощность притока тепла (бирюзовые прямые, для температур притока t_1 и t_3) и мощность потерь (чёрная прямая) в зависимости от температуры воды в резервуаре, в одном масштабе; $k = 0{,}6\,c\mu$ (из первого опыта: $k/c\mu = 15/25$). Точки пересечения дают t_2 и t_x

Обратите внимание: потери определяются разностью $t - t_0$, а не самой температурой воды. Поэтому нельзя считать, что температура в резервуаре сдвигается вместе с температурой притока: $t_2 + (t_3 - t_1) = 75^\circ\text{C}$ — неверно.

Проверка. Размерность: обе части баланса — мощности. Пределы: при $t_3 = t_1$ формула даёт $t_x = t_2$; при $t_3 = t_0$ — $t_x = t_0$ (подаётся вода комнатной температуры); без потерь $t_2 = t_1$ и $t_x = t_3$. Второй способ: из баланса $t - t_0 = (t_{\text{пр}} - t_0) \cdot c\mu/(c\mu + k)$. По первому опыту доля $c\mu/(c\mu + k) = 25/40 = 5/8$, во втором $t_x - t_0 = 80 \cdot 5/8 = 50$, то есть $t_x = 60^\circ\text{C}$. Смысл: превышение температуры резервуара над комнатной всегда составляет одну и ту же долю $5/8$ превышения температуры притока.

Ответ. $t_x = t_0 + \dfrac{(t_3 - t_0)(t_2 - t_0)}{t_1 - t_0} = 60^\circ\text{C}$.