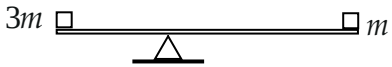
Невесомый рычаг с телами $3m$ и m

Задача 1. [Росатом 2025/26, 9 класс, задача 4] К концам невесомого рычага, длины плеч которого относятся как $1:2$, прикреплены два точечных тела массами $3m$ и m (см. рисунок). Вначале стержень удерживают горизонтально, а в некоторый момент отпускают. Найти ускорения тел сразу после этого. Найти также силу реакции опоры рычага сразу после его отпускания.

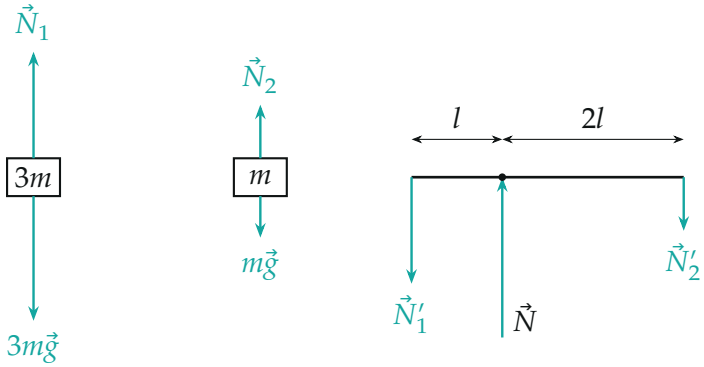


▲ **Решение. Что происходит.** Тяжёлое тело на коротком плече и лёгкое на длинном: момент тяжести тяжёлого тела вокруг опоры $3mg\cdot l = 3mgl$, лёгкого — $mg\cdot 2l = 2mgl$. Перевешивает левое тело: оно опускается, правое поднимается. Сразу после отпускания рычаг ещё горизонтален, а скорости равны нулю, поэтому ускорения тел вертикальны. Главная идея: рычаг безмассовый, значит, суммарный момент сил на него равен нулю (иначе угловое ускорение было бы бесконечным); это связывает силы, а жёсткость рычага связывает ускорения.

Обозначения. l — короткое плечо, $2l$ — длинное; a_1 — модуль ускорения тела $3m$ (вниз), a_2 — тела m (вверх); N_1 и N_2 — силы, с которыми рычаг действует на тела; N — сила реакции опоры на рычаг.

1. Второй закон Ньютона для тел. Сразу после отпускания на каждое тело действуют тяжесть и сила со стороны рычага, направленная вертикально вверх. В проекции на вертикаль: для тела $3m$ — вниз, для тела m — вверх:

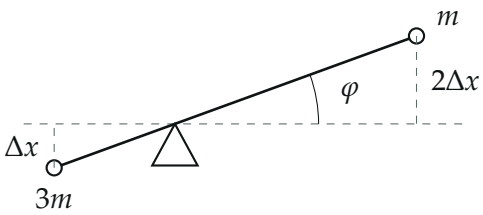
$$3m\,a_1 = 3mg - N_1, \qquad m\,a_2 = N_2 - mg.$$



Силы на тело $3m$, тело m и на рычаг ($\vec{N}_1'$, $\vec{N}_2'$ — силы тел на рычаг по третьему закону Ньютона; длины стрелок — по модулю)

2. Рычаг. Рычаг безмассовый, поэтому сумма моментов сил на него относительно опоры равна нулю: силы тел на рычаг $N_1' = N_1$ и $N_2' = N_2$ направлены вниз, их плечи l и $2l$, а сила реакции опоры момента не создаёт:

$$N_1\, l = N_2 \cdot 2l \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2N_2.$$



Рычаг, повёрнутый на малый угол φ: тело $3m$ опустилось на $\Delta x = l\sin\varphi$, тело m поднялось на $2\Delta x = 2l\sin\varphi$

3. Кинематическая связь. Рычаг жёсткий, при малом повороте точки на расстояниях l и $2l$ от опоры смещаются по вертикали на Δx и $2\Delta x$: треугольники подобны. Поэтому в любой момент скорость тела m вдвое больше скорости тела $3m$, то же для ускорений:

$$a_2 = 2a_1.$$

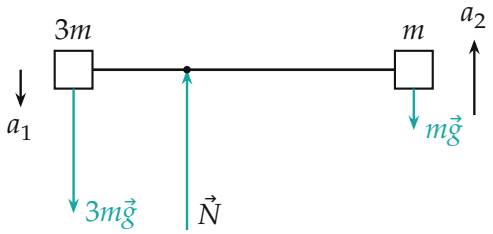
4. Решение. Из второго уравнения тел с $a_2 = 2a_1$: $N_2 = m(g + 2a_1)$; подставим $N_1 = 2N_2$ в первое: $3m\,a_1 = 3mg - 2m(g + 2a_1)$, откуда $7a_1 = g$:

$$a_1 = \frac{g}{7}, \qquad a_2 = \frac{2g}{7}, \qquad N_2 = \frac{9}{7}\,mg, \qquad N_1 = \frac{18}{7}\,mg.$$

5. Реакция опоры. У безмассового рычага сумма сил тоже нулевая: силы тел вниз (N_1' и N_2'), опора вверх, так что $N = N_1 + N_2$:

$$N = \frac{18}{7}\,mg + \frac{9}{7}\,mg = \frac{27}{7}\,mg.$$

Обратите внимание: $N < 4mg$ — опора не держит полный вес, потому что центр масс системы ускоряется вниз: $3ma_1 = 3mg/7$ больше, чем $ma_2 = 2mg/7$.



Силы на систему рычаг + два тела (длины стрелок — по модулю) и ускорения тел: центр масс системы ускоряется вниз

Проверка. Второй способ — вращение вокруг опоры: момент тяжести $3mg\,l - mg\cdot 2l = mgl$ равен $I\varepsilon$, где $I = 3m\,l^2 + m(2l)^2 = 7ml^2$, значит $\varepsilon = g/(7l)$ и $a_1 = \varepsilon l = g/7$, $a_2 = \varepsilon\cdot 2l = 2g/7$ — совпало. Через центр масс: $4m\,a_{\text{цм}} = 3m\,a_1 - m\,a_2 = mg/7$ вниз, поэтому $4mg - N = mg/7$ и $N = 27mg/7$. Смысл: ускорения задаёт разность моментов тяжести mgl; при равных моментах рычаг остался бы в покое.

Ответ. Тело $3m$: $a_1 = \frac{g}{7}$, вниз; тело m: $a_2 = \frac{2g}{7}$, вверх; сила реакции опоры $N = \frac{27}{7}\,mg$.