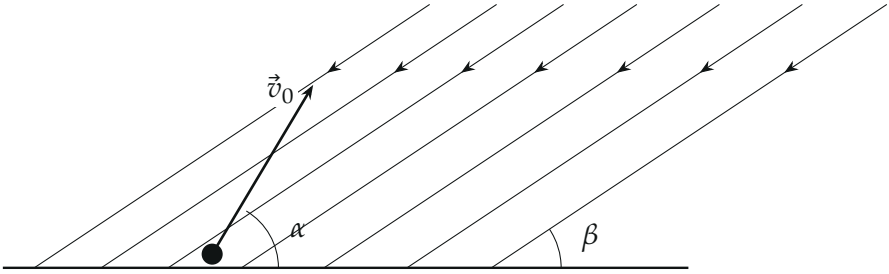
Тень брошенного камня

Задача 5. [Росатом 2025/26, 9 класс, задача 5] Тело бросают с поверхности земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Светит Солнце; солнечные лучи составляют угол β с горизонтом и параллельны плоскости траектории камня (см. рисунок). Какой путь пройдёт тень камня на земле к моменту его падения? Сопротивлением воздуха пренебречь. Рассмотреть два случая — $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$.



▲ **Решение. Что происходит.** Лучи идут справа сверху налево вниз, поэтому тень точки, висящей на высоте y над землёй, лежит на земле на расстоянии $y\operatorname{ctg}\beta$ *левее* неё. Тень камня — «проекция» его траектории вдоль лучей на землю: её положение $x_s = x - y\operatorname{ctg}\beta$, где x и y — координаты камня. Пока камень летит, тень может уйти назад, остановиться и вернуться, а путь складывается из длин всех участков, поэтому важно знать, меняет ли тень направление. Главная идея: скорость тени равна нулю, когда скорость камня параллельна лучам, то есть когда луч касается траектории.

Обозначения. Начало координат — точка броска, ось x вдоль земли в сторону полёта, ось y вверх; R — дальность полёта, $t_\text{п}$ — время полёта, x_s — координата тени, v_s — её скорость, S — искомый путь тени.

1. Движение камня. Без сопротивления воздуха камень движется с ускорением $\vec{g}$:

$$x = v_0\cos\alpha\cdot t, \qquad y = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Камень падает при $y = 0$, то есть в момент $t_{\text{п}} = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$; дальность полёта

$$R = v_0 \cos\alpha \cdot t_{\text{п}} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

В момент броска и в момент падения камень на земле, и тень совпадает с ним: тень начинает в точке $x_s = 0$ и заканчивает в точке $x_s = R$.

2. Положение и скорость тени. Луч, проходящий через камень в точке (x, y), идёт под углом β к горизонту и пересекает землю в точке

$$x_s = x - y \operatorname{ctg}\beta = -\frac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta}\, t + \frac{g \operatorname{ctg}\beta}{2}\, t^2.$$

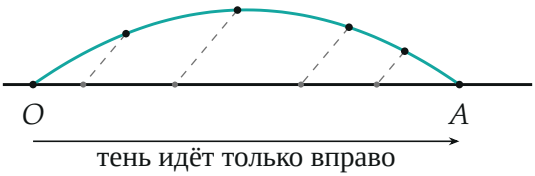
Скорость тени — производная по времени:

$$v_s = \frac{dx_s}{dt} = -\frac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta} + g \operatorname{ctg}\beta \cdot t.$$

Это линейная функция времени с положительным коэффициентом при t: скорость тени только растёт. Значит, тень может сменить направление не больше одного раза — с движения влево на движение вправо.

3. Случай $\alpha < \beta$ (и $\alpha = \beta$). Тогда $\sin(\alpha - \beta) \le 0$, начальная скорость тени $v_s(0) \ge 0$ и дальше только растёт: тень всё время движется вправо и не возвращается. Её путь равен смещению от точки броска до точки падения:

$$S = R = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

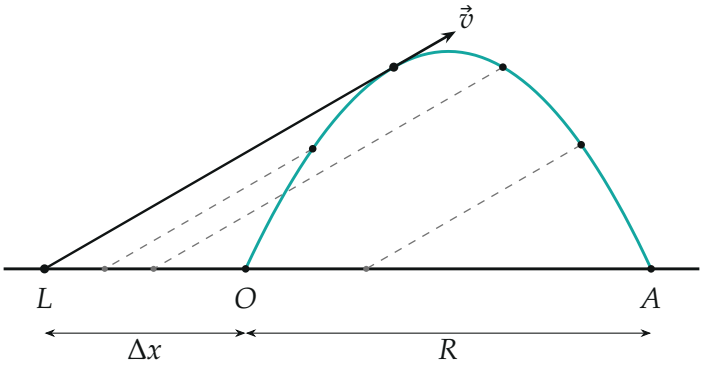


Случай $\alpha < \beta$ ($\alpha = 35°$, $\beta = 50°$): камень поднимается положе лучей, и тень от начала до конца полёта движется вправо

4. Случай $\alpha > \beta$: момент поворота. Теперь $v_s(0) < 0$: камень поднимается круче лучей, и тень сначала уходит влево, назад от точки падения. Она остановится, когда $v_s = 0$:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta}.$$

Это происходит до падения: $t_1 = \dfrac{v_0(\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\beta)}{g} < \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} < t_\text{п}$. В этот момент $v_s = 0$, то есть $v_x = v_y \operatorname{ctg}\beta$: скорость камня направлена вдоль лучей, а луч, проходящий через камень, касается траектории.



Случай $\alpha > \beta$ ($\alpha = 65°$, $\beta = 30°$): точки — положения камня и их тени на земле. Самая левая тень L получается от луча, касающегося траектории (скорость $\vec{v}$ камня параллельна лучам). Тень идёт $O \to L \to O \to A$

5. Самая левая точка тени. Запишем $x_s(t) = -at + \dfrac{b}{2}t^2$, где $a = \dfrac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta}$, $b = g \operatorname{ctg}\beta$. Минимум достигается при $t_1 = a/b$, и

$$x_{s,\min} = -\frac{a^2}{2b} = -\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \sin\beta \cos\beta} \equiv -\Delta x.$$

6. Путь тени. Тень идёт влево на Δx, возвращается в точку броска

(ещё Δx) и идёт до точки падения (R):

$$S = 2\Delta x + R = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{g \sin\beta \cos\beta} + \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Обратите внимание: путь — это не смещение. Смещение тени равно R при любых углах, но при $\alpha > \beta$ тень проходит ещё два лишних отрезка по Δx.

Итог по случаям. Тот же результат в компактной записи:

$$S = \frac{v_0^2}{g}\left[\sin 2\alpha + \frac{2\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin 2\beta}\right] \quad (\alpha > \beta), \qquad S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (\alpha \le \beta).$$

Например, при $v_0 = 10$ м/с, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $g = 10$ м/с^2: $R \approx 8{,}66$ м, $\Delta x \approx 2{,}89$ м, $S \approx 14{,}4$ м.

Проверка. Размерность: v_0^2/g — метры. При $\alpha \to \beta$ добавка с множителем $\sin^2(\alpha - \beta)$ уходит в нуль, и ответ непрерывно переходит в ответ случая $\alpha < \beta$. При малых β (солнце у горизонта) $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$, и

$$\Delta x \approx \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g\beta} = \frac{y_{\max}}{\beta} = y_{\max} \operatorname{ctg}\beta,$$

где $y_{\max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ — высота подъёма: тень вершины траектории действительно лежит на $y_{\max} \operatorname{ctg}\beta$ левее точки броска.

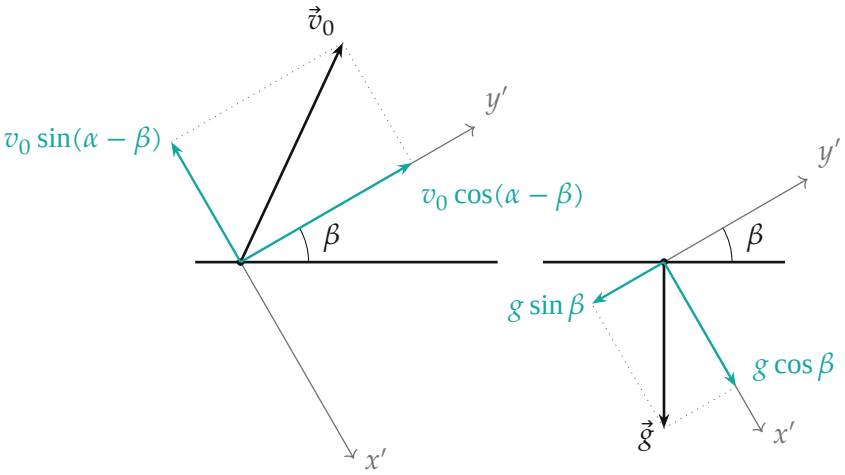
Второй способ — оси вдоль лучей: ось y' направим против лучей, ось x' перпендикулярно им (вправо вниз). Расстояние между двумя лучами, измеренное вдоль земли, в $1/\sin\beta$ раз больше расстояния между ними по x', поэтому $x_s = x'/\sin\beta$. Проекции начальной скорости и ускорения на x' (рисунок ниже) равны $-v_0 \sin(\alpha - \beta)$ и $g\cos\beta$, так что

$$x'(t) = -v_0 \sin(\alpha - \beta)\, t + \frac{g\cos\beta}{2}\, t^2.$$

Минимум — при том же t_1, и в земных координатах получаем прежний

результат:

$$\Delta x = \frac{|x'_{\min}|}{\sin\beta} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha-\beta)}{2g\cos\beta\,\sin\beta}.$$



Слева — разложение скорости $\vec{v}_0$ по осям y' (против лучей) и x'; справа — разложение ускорения $\vec{g}$

Ответ. 1) при $\alpha > \beta$: $S = \dfrac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} + \dfrac{v_0^2\sin^2(\alpha-\beta)}{g\sin\beta\cos\beta}$; 2) при $\alpha < \beta$: $S = \dfrac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$.