Что внутри? (серый ящик)

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 10 класс, практический тур, задача 2] «Что внутри? (серый ящик)».

Внутри «серого» ящика находится идеальный источник с подключённым последовательно к нему резистором (рис. 1).

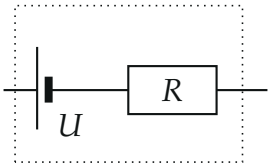


Рис. 1

1. Определите напряжение U идеального источника и сопротивление R резистора, находящихся внутри ящика.
2. Используя в качестве источника напряжения один из мультиметров, включённый в режиме омметра (в диапазоне 2000 кОм), определите напряжение этого источника U_0 и сопротивление r_0 последовательно соединённого с ним резистора (резистор находится внутри мультиметра).

Примечание: эквивалентная схема мультиметра, используемого в качестве источника напряжения, полностью аналогична схеме чёрного ящика, приведённой на рис. 1.

Приборы и оборудование: два одинаковых мультиметра, «серый» ящик с двумя выходами. Погрешность мультиметра считать равной 1% от значения измеряемой величины + 1 единица последнего разряда. Внимание! Использовать мультиметр в режиме амперметра строго запрещено! Такие решения засчитываться не будут.

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача на закон Ома для полной цепи. Ящик — источник с внутренним сопротивлением, и оно, как выяснится, порядка мегаома, то есть сравнимо с сопротивлением вольтметра. Поэтому вольтметр показывает не U, а напряжение на себе как на нагрузке. Амперметр запрещён, но сам вольтметр — известная нагрузка R_V (её можно измерить вторым мультиметром-омметром).

Подключая к ящику разные известные нагрузки — один вольтметр, два последовательно, два параллельно, — получаем систему уравнений на две неизвестные U и R. Омметр — такой же «ящик» со своими U_0 и r_0; его исследуем тем же приёмом, используя уже известный серый ящик как добавочный источник.

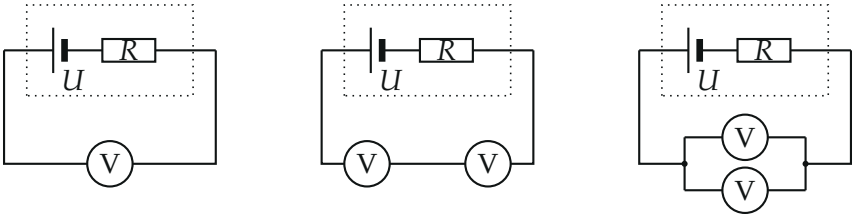
Обозначения. R_V — сопротивление вольтметра (диапазон 20 В); U_1 — показание одного вольтметра на ящике; U_2 — показание каждого из двух последовательно включённых вольтметров; U_3 — двух параллельных; U_4 — показание вольтметра, подключённого к омметру; U_5 — вольтметра в цепи «омметр + ящик + вольтметр».

1. Сопротивление вольтметра. Второй мультиметр в режиме омметра (2000 кОм) подключаем к входу первого, включённого вольтметром на диапазон 20 В:

$$R_V = (1{,}00 \pm 0{,}02)\ \text{МОм}.$$

Пальцами контакты не трогаем: сопротивление тела порядка мегаома и исказит результат.

2. Измерения с ящиком (рис. 2): один вольтметр — $U_1 = (3{,}94 \pm 0{,}05)$ В; два последовательно — каждый показывает $U_2 = (2{,}82 \pm 0{,}04)$ В; два параллельно — $U_3 = (2{,}46 \pm 0{,}04)$ В. Сумма показаний двух последовательных 5,64 В больше, чем показание одного: внутреннее сопротивление ящика сравнимо с R_V.



а) б) в)

Рис. 2. Нагрузки на ящик: а) один вольтметр (R_V); б) два последовательно ($2R_V$); в) два параллельно ($R_V/2$)

3. Закон Ома для полной цепи. Ток через ящик и нагрузку $R_н$ один:

$I = \dfrac{U}{R + R_н}$, напряжение на нагрузке $IR_н$. Для схем рис. 2:

$$U_1 = \frac{UR_V}{R + R_V}, \qquad 2U_2 = \frac{U \cdot 2R_V}{R + 2R_V}, \qquad U_3 = \frac{U \cdot R_V/2}{R + R_V/2}.$$

Перевернём первые два: $\dfrac{U}{U_1} = 1 + \dfrac{R}{R_V}$, $\dfrac{U}{U_2} = 2 + \dfrac{R}{R_V}$. Вычитаем — R уходит:

$$U\Big(\frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_1}\Big) = 1 \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{U_1 U_2}{U_1 - U_2} = \frac{3{,}94 \cdot 2{,}82}{1{,}12}\ \text{В} = 9{,}92\ \text{В},$$

$$R = R_V\Big(\frac{U}{U_1} - 1\Big) = R_V\,\frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2} = 1{,}00 \cdot \frac{1{,}70}{1{,}12}\ \text{МОм} = 1{,}52\ \text{МОм}.$$

4. Проверка третьим измерением. С найденными U, R два параллельных вольтметра должны показать $U_3 = \dfrac{9{,}92 \cdot 0{,}5}{1{,}52 + 0{,}5} = 2{,}46$ В — ровно измеренное. Все три точки лежат на одной кривой «напряжение на нагрузке — сопротивление нагрузки» (рис. 3); ток короткого замыкания $I_{кз} = U/R = 6{,}5$ мкА.

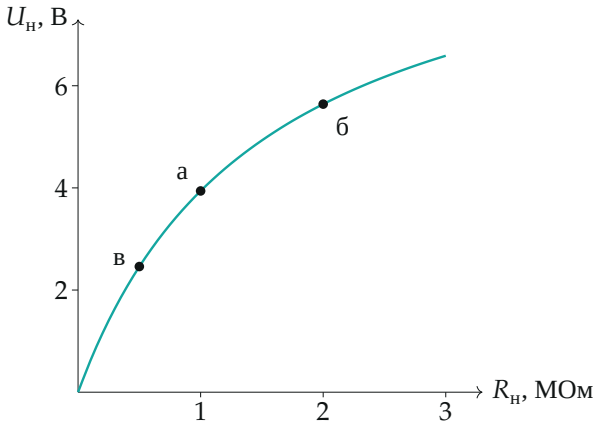


Рис. 3. Напряжение на нагрузке ящика: кривая $U_н = UR_н/(R + R_н)$ с найденными $U = 9{,}92$ В, $R = 1{,}52$ МОм; точки — измерения (для «б» — сумма двух вольтметров, $2U_2$); при $R_н \to \infty$ кривая стремится к U

5. Омметр как источник. Омметр — такой же ящик (U_0, r_0). Одного вольтметра на нём мало: два неизвестных. Добавим к нему известный теперь серый ящик (рис. 4). Вольтметр прямо на омметре (а):

$$U_4 = \frac{U_0 R_V}{R_V + r_0} = (148{,}3 \pm 1{,}5)\ \text{мВ}. \qquad (1)$$

Цепь «омметр + ящик + вольтметр», источники включены согласно (напряжения складываются), (б):

$$U_5 = \frac{(U + U_0)R_V}{R_V + r_0 + R} = (2{,}90 \pm 0{,}04)\ \text{В}. \qquad (2)$$

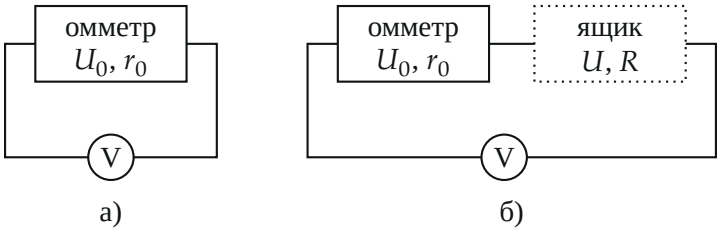


Рис. 4. Исследование омметра: а) вольтметр прямо на омметре; б) омметр и серый ящик последовательно (полярность — чтобы напряжения складывались) с вольтметром

6. Решение системы. Из (1) $U_0 = U_4(1 + \frac{r_0}{R_V})$; подставим в (2) и решим линейное уравнение относительно r_0:

$$r_0 = \frac{R_V(U_4 + U) - U_5(R + R_V)}{U_5 - U_4} = \\ = \frac{1{,}00 \cdot 10{,}07 - 2{,}90 \cdot 2{,}52}{2{,}75}\ \text{МОм} = 1{,}0\ \text{МОм},$$

$$U_0 = U_4\left(1 + \frac{r_0}{R_V}\right) = 148{,}3 \cdot 2{,}0\ \text{мВ} \approx 0{,}30\ \text{В}.$$

Проверка подстановкой: $(9{,}92 + 0{,}30) \cdot 1{,}00/(1{,}00 + 1{,}0 + 1{,}52) = 2{,}90$ В — совпадает с U_5.

7. Погрешности. Считаем, как меняется результат при сдвиге каждого измерения на его погрешность (python), и складываем вклады: U_1 и U_2 дают основное, потому что их разность $U_1 - U_2 = 1{,}12$ В мала, и относительная ошибка разности ($\approx 8\%$) переходит в ответ:

$$\Delta U \approx 0{,}8\ \text{В}, \quad \Delta R \approx 0{,}2\ \text{МОм}, \quad \Delta r_0 \approx 0{,}2\ \text{МОм}, \quad \Delta U_0 \approx 0{,}03\ \text{В}.$$

Обратите внимание. Показание вольтметра на ящике (3,94 В) — не ЭДС: внутреннее сопротивление ящика больше сопротивления вольтметра, и «съедает» больше половины напряжения.

Соберём ответ.

$$U = \frac{U_1 U_2}{U_1 - U_2}, \qquad R = R_V \frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2},$$

$$r_0 = \frac{R_V(U_4 + U) - U_5(R + R_V)}{U_5 - U_4}, \qquad U_0 = U_4\Big(1 + \frac{r_0}{R_V}\Big).$$

Проверка. Третье, независимое измерение (два вольтметра параллельно) совпало с расчётом по двум первым — модель «идеальный источник + резистор» подтверждена. Предел: если бы $R \ll R_V$, получилось бы $U_1 \approx U_2 \cdot 2$ и $U \approx U_1$ — обычный вольтметр. Омметр на пределе 2000 кОм с $r_0 \approx 1$ МОм и $U_0 \approx 0{,}3$ В даёт ток короткого замыкания 0,3 мкА — разумно для измерения мегаомов.

Смысл: вольтметр с известным сопротивлением — это и прибор, и нагрузка; меняя нагрузку, можно «прощупать» источник без амперметра.

Ответ. 1) $U = (9{,}9 \pm 0{,}8)$ В, $R = (1{,}5 \pm 0{,}2)$ МОм; 2) $U_0 = (0{,}30 \pm 0{,}03)$ В, $r_0 = (1{,}0 \pm 0{,}2)$ МОм (при $R_V = 1{,}00$ МОм, $U_1 = 3{,}94$ В, $U_2 = 2{,}82$ В, $U_4 = 148{,}3$ мВ, $U_5 = 2{,}90$ В).