Стакан-поплавок

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Стакан-поплавок».

В цилиндрическом сосуде площадь дна которого S_2 плавает тонкостенный цилиндрический стакан с площадью дна S_1 и высотой $h = 24$ см. Стакан начинают медленно погружать в воду, измеряя зависимость приложенной силы F от перемещения x стакана вниз относительно дна сосуда (рис. 1). Оказалось, что силе $F_1 = 1{,}0$ Н соответствуют два значения x: $x_{1,1} = 1{,}5$ см и $x_{1,2} = 7{,}5$ см, а силе $F_2 = 2{,}0$ Н — значения x: $x_{2,1} = 3{,}0$ см и $x_{2,2} = 7{,}0$ см. Полагая, что плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, вычислите: а) массу стакана; б) площадь S_1 дна стакана; в) площадь S_2 дна сосуда.

Объёмом стекла, из которого изготовлен стакан, можно пренебречь по сравнению с объёмом воды, которой можно наполнить стакан.

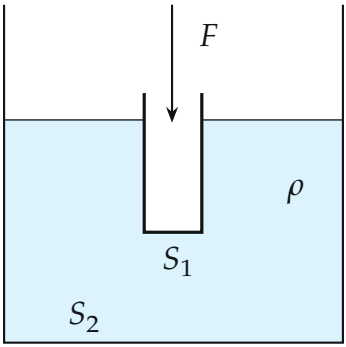

Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Архимеда с «сообщающимся» уровнем: стакан, уходя вниз, вытесняет воду, и уровень в сосуде поднимается. Пока край стакана над водой, сила F растёт линейно с x. Когда уровень дойдёт до края, вода начинает переливаться внутрь, стакан тонет, и сила линейно падает до нуля. Значит, график $F(x)$ — «домик» из двух прямых, и четыре точки из условия лежат по две на каждой стороне. По наклонам и вершине домика находятся все три неизвестные.

Обозначения. m — масса стакана; d_0 — начальная глубина погружения дна стакана (при $F = 0$); $h_1 = h - d_0$ — на сколько край стакана выступал над водой вначале; Δ — подъём уровня воды в сосуде; x^*, F^* — перемещение и сила в момент, когда уровень дошёл до края; $x_{\max}$ — перемещение, при котором сила вновь стала нулём.

1. Начальное плавание. Второй закон Ньютона для стакана без внешней силы (сила тяжести и сила Архимеда): $mg = \rho g S_1 d_0$, откуда

$$d_0 = \frac{m}{\rho S_1}, \qquad h_1 = h - \frac{m}{\rho S_1}.$$

2. Пока край стакана над водой: геометрия. Стакан опустился относительно дна сосуда на x, уровень поднялся на Δ (рис. 2). Объём воды не изменился: вода, вытесненная опустившимся дном стакана, заняла кольцо площадью $S_2 - S_1$ вокруг стакана:

$$S_1 x = (S_2 - S_1)\Delta \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{S_1 x}{S_2 - S_1}.$$

Глубина погружения стакана выросла на $x + \Delta = \dfrac{S_2 x}{S_2 - S_1}$ — больше, чем само перемещение: уровень идёт навстречу дну.

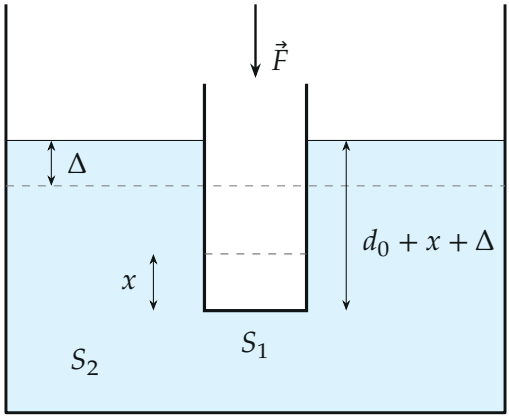

Рис. 2. Стакан опущен на x (пунктир внутри — прежнее положение дна, пунктир через сосуд — прежний уровень); уровень поднялся на Δ

3. Сила на первом участке. Второй закон Ньютона для стакана в проекции на вертикаль (стакан движется медленно — ускорения нет), силы — на рис. 3:

$$F + mg = \rho g S_1 (d_0 + x + \Delta) \quad \Longrightarrow \quad F = \rho g \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} x = k_1 x. \qquad (1)$$

Сила растёт линейно, прямая проходит через начало координат.

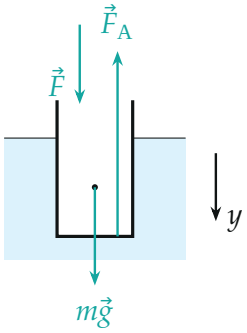

Рис. 3. Силы на стакан: внешняя $\vec{F}$, тяжесть $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A = F + mg$

4. Конец первого участка. Край дойдёт до уровня, когда глубина погружения станет h, то есть вырастет на h_1: $\dfrac{S_2 x^*}{S_2 - S_1} = h_1$. Отсюда и из (1)

$$x^* = h_1 \frac{S_2 - S_1}{S_2}, \qquad F^* = k_1 x^* = \rho g S_1 h_1.$$

Второй способ для F^*: стакан ушёл под воду ровно по край, сила Архимеда $\rho g S_1 h$, значит $F^* = \rho g S_1 h - mg = \rho g S_1 (h - d_0) = \rho g S_1 h_1$ — то же.

5. Второй участок: вода переливается внутрь. Опускаем стакан дальше на $\delta = x - x^*$. Край остаётся на уровне воды (лишняя вода тут же переливается), внутри набирается вода (рис. 4). Объём воды в сосуде с учётом налитой в стакан неизменен; уровень и край опустились вместе с дном стакана на δ, значит, в стакан перелилось $\Delta V = S_2 \delta$: уровень во

всём сосуде (площадь S_2) упал на δ, а стакан при этом вытесняет столько же, сколько раньше. Сила Архимеда на стакан не меняется ($\rho g S_1 h$), зато в стакане появилась вода весом $\rho g S_2 \delta$, которую тоже держит наша рука. Второй закон Ньютона для стакана с водой внутри:

$$F = \rho g S_1 h - mg - \rho g S_2 \delta = F^* - k_2(x - x^*), \qquad k_2 = \rho g S_2. \qquad (2)$$

Сила падает линейно и обращается в нуль, когда стакан наполнится настолько, что утонет сам.

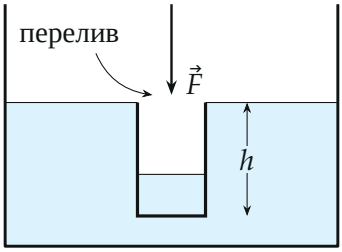

Рис. 4. Второй участок: край стакана на уровне воды, лишняя вода переливается внутрь

6. Конец второго участка. Подставим в (2) $F = 0$ и x^*, F^* из п. 4: $x_{\max} = x^* + \dfrac{\rho g S_1 h_1}{\rho g S_2} = h_1 \dfrac{S_2 - S_1}{S_2} + h_1 \dfrac{S_1}{S_2} = h_1$. Перемещение, при котором стакан тонет, равно начальной высоте его края над водой — красивый результат: весь путь края до затонувшего положения равен h_1, потому что уровень в конце возвращается к исходному (вся вытесненная вода снова в сосуде).

7. Наклоны по данным. Точки $x_{1,1} = 1{,}5$ см, $F = 1$ Н и $x_{2,1} = 3{,}0$ см, $F = 2$ Н лежат на прямой через начало координат — это первый участок:

$$k_1 = \frac{2{,}0\ \text{Н}}{3{,}0\ \text{см}} = \frac{2}{3}\ \text{Н/см}.$$

Точки $x_{2,2} = 7{,}0$ см и $x_{1,2} = 7{,}5$ см — второй участок, сила падает:

$$k_2 = \frac{2{,}0 - 1{,}0}{7{,}5 - 7{,}0}\ \frac{\text{Н}}{\text{см}} = 2\ \text{Н/см}, \qquad x_{\max} = 7{,}5 + \frac{1{,}0}{2} = 8{,}0\ \text{см} = h_1.$$

Вершина домика — пересечение прямых $\frac{2}{3}x = 2(8-x)$: $x^* = 6$ см, $F^* = 4$ Н (рис. 5).

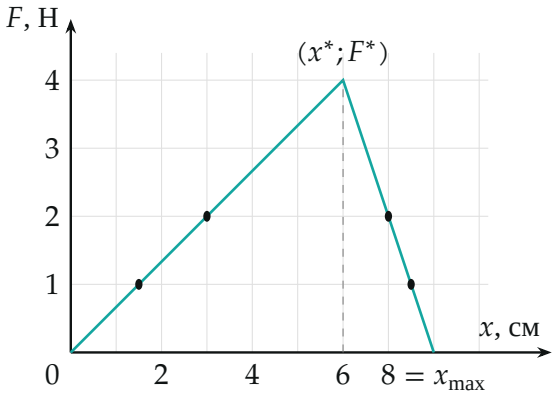

Рис. 5. График $F(x)$: точки — данные условия, прямые — формулы (1) и (2)

8. Площади и масса. Из $k_2 = \rho g S_2$:

$$S_2 = \frac{k_2}{\rho g} = \frac{200\ \text{Н/м}}{10^3 \cdot 10\ \text{Н/м}^3} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2 = 200\ \text{см}^2.$$

Из $x^* = h_1(S_2 - S_1)/S_2$: $\frac{S_1}{S_2} = 1 - \frac{x^*}{h_1} = 1 - \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$, $S_1 = 50$ см^2. Второй способ — через k_1: $\rho g \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} = 10^4 \cdot \frac{0{,}005 \cdot 0{,}02}{0{,}015} = 66{,}7$ Н/м $= \frac{2}{3}$ Н/см — совпадает с наклоном по данным. Масса — из п. 1:

$$m = \rho S_1 (h - h_1) = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}16\ \text{кг} = 0{,}8\ \text{кг}.$$

Проверка вершины: $F^* = \rho g S_1 h_1 = 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}08 = 4$ Н — как на графике.

Обратите внимание. На втором участке сила Архимеда на стакан уже не растёт, а F уменьшается за счёт веса затекающей воды, причём наклон $\rho g S_2$ определяется площадью всего сосуда, а не стакана: уровень опускается во всём сосуде.

Соберём ответ.

$$S_2 = \frac{k_2}{\rho g}, \qquad S_1 = S_2\Big(1 - \frac{x^*}{x_{\max}}\Big), \qquad m = \rho S_1 (h - x_{\max}).$$

Проверка. Размерности: $[k/(\rho g)] = \frac{\text{Н/м}}{\text{кг/м}^3\cdot\text{м/с}^2} = \text{м}^2$, $[\rho S h] = \text{кг}$. Предел: при $S_2 \to \infty$ уровень не поднимается, наклон первого участка $\rho g S_1$, а второй участок становится вертикальным — стакан тонет мгновенно, как в открытом море. Стакан 0,8 кг при площади 50 см^2 сидит на 16 см из 24 — разумно.

Смысл: по «домику» $F(x)$ правый наклон даёт площадь сосуда, положение вершины — отношение площадей, а точка, где сила снова ноль, — запас высоты борта над водой.

Ответ. а) $m = \rho S_1 (h - x_{\max}) = 0{,}8$ кг; б) $S_1 = 50$ см^2; в) $S_2 = 200$ см^2.