Вязкий валик

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Вязкий валик».

Однородный цилиндр массы m и радиуса R касается двух параллельных длинных вертикальных пластин, движущихся с постоянными скоростями v_1 и v_2 вверх (рис. 1). Между пластинами и поверхностью цилиндра существует вязкое трение, сила его пропорциональна относительной скорости соприкасающихся поверхностей ($\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma\,\vec{v}_{\text{отн}}$). Коэффициенты вязкого трения для первой и второй пластин равны γ_1 и γ_2 соответственно.

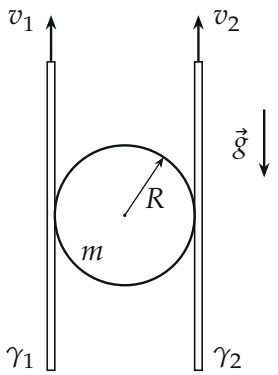

Рис. 1

1. Найдите установившуюся угловую скорость ω вращения цилиндра, а также скорость v его центра.
2. При каком условии цилиндр будет двигаться вверх?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику плоского движения твёрдого тела с вязким трением. Цилиндр зажат между пластинами, тяжесть тянет его вниз, а вязкое трение тянет каждую точку касания к скорости своей пластины. Пока скорости не установились, силы трения меняются вместе с v и ω; в установившемся режиме ускорений нет, и тогда должны обнулиться и сумма сил, и сумма моментов. Значит, нужны два уравнения: второй закон Ньютона для центра масс и уравнение моментов относительно оси цилиндра, а связывает их кинематика — скорости точек касания через v и ω.

Обозначения. Ось y — вертикально вниз; v — проекция скорости центра O на y; ω — угловая скорость, положительная по часовой стрелке; A и B — точки касания с левой (первой) и правой (второй) пластинами; v_A, v_B — их проекции скорости на y; F_1, F_2 — проекции сил трения на ось, направленную вверх.

1. Скорости точек касания. Скорость точки твёрдого тела равна скорости центра плюс скорость вращения вокруг центра (рис. 2). При вращении по часовой стрелке левая точка A движется вверх со скоростью ωR, правая B — вниз:

$$v_A = v - \omega R, \qquad v_B = v + \omega R.$$

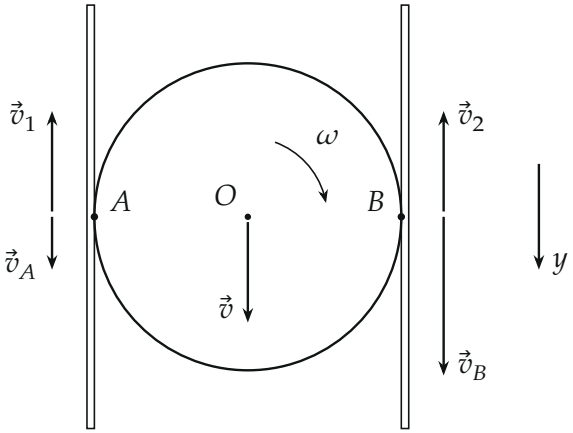

Рис. 2. Кинематика: $v_A = v - \omega R$, $v_B = v + \omega R$ (длины — для $\omega R = v/2$); пластины движутся вверх

2. Силы трения. Скорость точки A относительно первой пластины: $v_A - (-v_1) = v_1 + v - \omega R$ вниз. Сила вязкого трения направлена против относительной скорости, то есть вверх, и по закону из условия

$$F_1 = \gamma_1(v_1 + v - \omega R), \qquad F_2 = \gamma_2(v_2 + v + \omega R)$$

(сила F_2 — на точку B от второй пластины). Если скобка отрицательна, сила направлена вниз — формулы остаются верными со знаком. Других сил вдоль вертикали нет: силы реакции пластин горизонтальны.

3. Установившееся движение: два уравнения. Второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на вертикаль (ускорение центра равно нулю) и уравнение моментов относительно оси цилиндра (угловое ускорение равно нулю; тяжесть и горизонтальные силы реакции проходят через ось, плечо сил трения R, рис. 3):

$$F_1 + F_2 = mg, \qquad F_1 R = F_2 R.$$

Отсюда силы трения равны:

$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2}.$$

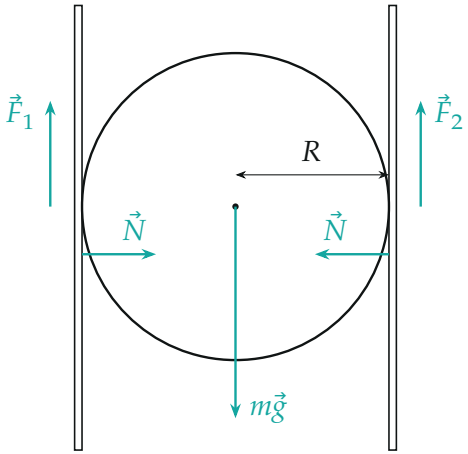

Рис. 3. Силы на цилиндр в установившемся режиме: $F_1 = F_2 = mg/2$; горизонтальные реакции $\vec{N}$ уравновешены

Пункт 1. Скорости. Подставим силы из п. 2:

$$v + v_1 - \omega R = \frac{mg}{2\gamma_1}, \qquad v + v_2 + \omega R = \frac{mg}{2\gamma_2}.$$

Сложим и вычтем уравнения:

$$v = \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right) - \frac{v_1 + v_2}{2}, \qquad \omega = \frac{mg}{4R}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right) + \frac{v_1 - v_2}{2R}.$$

$v > 0$ — центр движется вниз, $\omega > 0$ — вращение по часовой стрелке. Рис. 4 показывает тот же результат иначе: скорость точек горизонтального диаметра линейна по x, и в точках касания она отличается от скорости пластины ровно на $mg/(2\gamma_i)$ вниз.

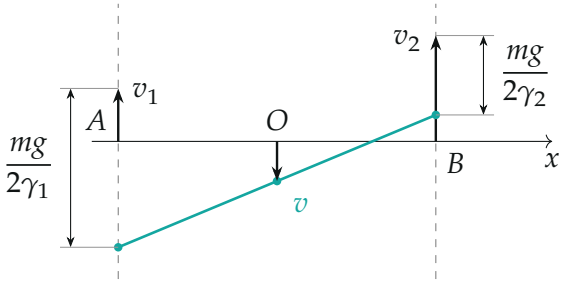

Рис. 4. Вертикальные скорости точек горизонтального диаметра (бирюзовая прямая, вверх — вверх по рисунку; пример $v_1 = \frac{1}{3}\frac{mg}{2\gamma_1}$, $v_2 = \frac{4}{3}\frac{mg}{2\gamma_2}$, $\gamma_2 = 2\gamma_1$): в точках касания скорость меньше скорости пластины на $mg/(2\gamma_i)$, в центре — скорость центра, наклон прямой — ω

Пункт 2. Когда цилиндр поднимается. Цилиндр движется вверх, если проекция на ось вниз отрицательна, $v < 0$:

$$v_1 + v_2 > \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right).$$

Смысл: каждая точка касания отстаёт от своей пластины на $mg/(2\gamma_i)$, центр движется со средней скоростью точек касания; чтобы он шёл вверх, пластины должны «перегнать» это суммарное отставание.

Обратите внимание. Силы трения равны не потому, что одинаковы пластины, а из уравнения моментов: при разных $\gamma_1 \neq \gamma_2$ равенство $F_1 = F_2$ обеспечивается вращением цилиндра.

Соберём ответ.

$$\omega = \frac{1}{2R}\left[\left(\frac{mg}{2\gamma_2} - v_2\right) - \left(\frac{mg}{2\gamma_1} - v_1\right)\right], \qquad v = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{mg}{2\gamma_1} - v_1\right) + \left(\frac{mg}{2\gamma_2} - v_2\right)\right].$$

Проверка. Размерность: $[mg/\gamma] = \dfrac{\text{Н}}{\text{Н}\cdot\text{с/м}} = \text{м/с}$, верно. Симметричный случай $\gamma_1 = \gamma_2$, $v_1 = v_2$: $\omega = 0$, цилиндр не вращается, как и долж-

но быть по симметрии. Неподвижные пластины: $v = \frac{mg}{4}(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}) > 0$ — падает, а при $\gamma_1 > \gamma_2$ вращается по часовой стрелке ($\omega > 0$): левую сторону трение тормозит сильнее, правая опускается быстрее — верно. Подстановка обратно: $\gamma_1(v_1 + v - \omega R) = \gamma_1 \cdot \frac{mg}{2\gamma_1} = \frac{mg}{2}$.

Смысл: в установившемся режиме каждая пластина держит ровно половину веса, а вращение подстраивается так, чтобы это было возможно.

Ответ. 1) $\omega = \frac{mg}{4R}\left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right) + \frac{v_1 - v_2}{2R}$ (по часовой стрелке), $v = \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right) - \frac{v_1 + v_2}{2}$ (вниз); 2) $v_1 + v_2 > \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)$.