Два шарика на двух нитях

Задача 3. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Два шарика на двух нитях».

Лёгкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погружённый в жидкость поплавок объёмом $V = 10$ см^3 и плотностью $\rho = 500$ кг/м^3. Над другой опорой висит привязанный к верху сосуда шарик такого же объёма V и плотностью 3ρ (рис. 1). Найдите модуль разности сил реакции опор.

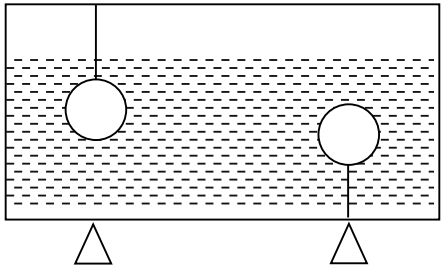

Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на статику: равновесие сосуда (правило моментов) плюс закон Архимеда для шариков. Тяжёлый шарик тянет свою нить вниз и, через крышку, давит на сосуд над левой опорой; лёгкий поплавок рвётся вверх и тянет дно над правой опорой вверх. Обе нити «перегружают» левую опору относительно правой. Давление жидкости на дно одинаково по всему дну, его равнодействующая — в центре и делится между опорами поровну, поэтому в разность реакций не входит.

Обозначения. ρ_0 — плотность жидкости (в ответ не войдёт); A — опора под тяжёлым шариком, B — под поплавком; $2l$ — расстояние между опорами; N_1, N_2 — силы реакции опор A и B; T_1, T_2 — силы натяжения нитей тяжёлого шарика и поплавка; F — сила давления жидкости на дно.

1. Нить тяжёлого шарика. Второй закон Ньютона для шарика плотностью 3ρ (он покоится; силы — рис. 2): тяжесть $3\rho Vg$ вниз, сила Архимеда $\rho_0 Vg$ и натяжение T_1 вверх:

$$T_1 = 3\rho Vg - \rho_0 Vg.$$

Нить натянута, если $3\rho > \rho_0$; это так, раз шарик висит на нити (для воды $1500 > 1000$).

2. Нить поплавка. Второй закон Ньютона для поплавка: сила Архимеда $\rho_0 Vg$ вверх, тяжесть ρVg и натяжение T_2 вниз:

$$T_2 = \rho_0 Vg - \rho Vg.$$

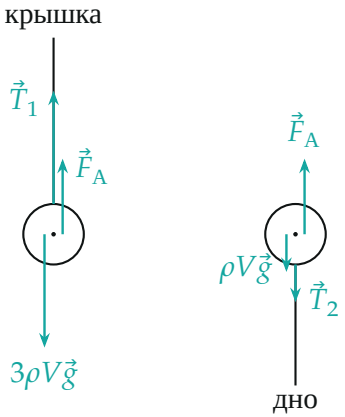

Рис. 2. Силы на тяжёлый шарик (слева) и поплавок (справа) при $\rho_0 = 2\rho$ (вода): $F_A = 2\rho Vg$, $T_1 = \rho Vg$, $T_2 = \rho Vg$; длины стрелок — по модулю

3. Силы на сосуд. Сосуд лёгкий. На него действуют (рис. 3): реакции опор N_1 и N_2 вверх; нить тяжёлого шарика тянет крышку вниз с силой T_1 (над опорой A); нить поплавка тянет дно вверх с силой T_2 (над опорой B); жидкость давит на дно с силой F. Давление на дно на одной глубине одинаково, значит, F приложена в центре дна, посередине между опорами. Давление на боковые стенки горизонтально и уравновешивается само.

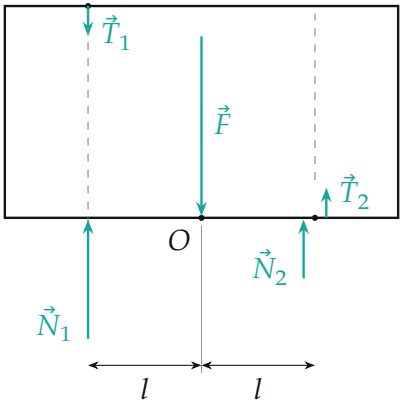

Рис. 3. Силы на лёгкий сосуд (длины — для воды, $\rho_0 = 2\rho$, и жидкости весом $6\rho Vg$): F — в центре дна, T_1 — на крышку над A, T_2 — на дно над B

4. Правило моментов для сосуда. Сосуд в равновесии, сумма моментов сил относительно центра дна O равна нулю. Сила F проходит через O и момента не даёт. Против часовой стрелки поворачивают N_2 (вверх справа), T_2 (вверх справа) и T_1 (вниз слева), по часовой — только N_1 (вверх слева). Итак,

$$N_1 l = N_2 l + T_1 l + T_2 l \quad \Longrightarrow \quad N_1 - N_2 = T_1 + T_2.$$

Сумма сил даёт ещё $N_1 + N_2 = F + T_1 - T_2$, но для разности она не нужна.

5. Разность реакций. Подставим натяжения из п. 1–2:

$$N_1 - N_2 = (3\rho - \rho_0)Vg + (\rho_0 - \rho)Vg = 2\rho Vg.$$

Плотность жидкости сократилась: сила Архимеда, уменьшающая натяжение одной нити, ровно на столько же увеличивает натяжение другой.

$$N_1 - N_2 = 2 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \text{ Н} = 0{,}1 \text{ Н}.$$

Больше реакция опоры под тяжёлым шариком.

6. Второй способ: вся система целиком. Возьмём систему «сосуд + жидкость + шарики»; нити и давление жидкости стали внутренними

силами. Внешние — реакции опор и силы тяжести. Мысленно заменим каждый шарик жидкостью того же объёма: получится однородная жидкость с центром тяжести посередине (рис. 4) плюс «поправки»: над A лишний вес $(3\rho - \rho_0)Vg$, над B — недостающий $(\rho_0 - \rho)Vg$, то есть сила $(\rho_0 - \rho)Vg$ вверх. Правило моментов относительно середины:

$$(N_1 - N_2)l = (3\rho - \rho_0)Vg\,l + (\rho_0 - \rho)Vg\,l \quad \Longrightarrow \quad N_1 - N_2 = 2\rho Vg.$$

Результат тот же.

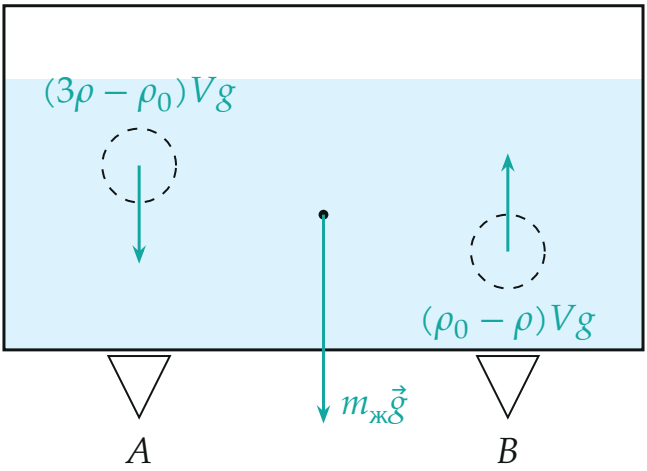

Рис. 4. Второй способ: шарики заменены жидкостью (пунктир), их отличие от жидкости — добавки над опорами: над A вниз, над B вверх

Обратите внимание. Плотность жидкости не дана — и не нужна. Но нельзя просто сказать «шарики давят на свои опоры весом»: сила тяжести шариков передаётся сосуду через нити *и* через жидкость, и только разность реакций от распределения давления не зависит.

Соберём ответ.

$$|N_1 - N_2| = T_1 + T_2 = (3\rho - \rho_0)Vg + (\rho_0 - \rho)Vg = 2\rho Vg = 0{,}1\ \text{Н}.$$

Проверка. Размерность: кг/м^3 $\cdot$ м^3 $\cdot$ м/с^2 $=$ Н. Знак: и тяжёлый шарик (тянет крышку вниз над A), и поплавок (тянет дно вверх над B) догружают опору A и разгружают B — разность положительна. Частный случай:

шарик плотности жидкости висел бы без натяжения ($T = 0$) и ничего не менял бы — в формуле $T_1 + T_2$ его вклад действительно пропадает. Второй способ (п. 6) дал то же.

Смысл: разность реакций опор равна сумме натяжений нитей — только они нарушают симметрию сосуда.

Ответ. $|N_1 - N_2| = 2\rho V g = 0{,}1$ Н (больше реакция опоры под тяжёлым шариком).