Сосуд Мариотта

Задача 4. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Сосуд Мариотта».

Сосуд Мариотта представляет собой герметически закрытый цилиндрический сосуд с площадью дна S, в верхнюю крышку которого вставлена открытая с обоих концов тонкая трубка (рис. 1). Нижний конец трубки расположен на расстоянии H от верхней крышки сосуда. Около дна сосуда в его боковую стенку вставлена горизонтальная трубка с краном. В начальный момент времени высота уровня воды относительно нижнего конца вертикальной трубки равна x_0, а сама эта трубка полностью заполнена воздухом. Кран закрыт. В момент времени $t = 0$ кран открывают, и вода начинает вытекать из сосуда, а пузырьки воздуха проникать в сосуд через вертикальную трубку. Расход вытекающей жидкости равен ω (объём в единицу времени). Температура сосуда T и атмосферное давление p_0 известны и остаются постоянными. Давлением насыщенных паров воды пренебречь. Считайте, что в ходе всего эксперимента уровень жидкости в сосуде не опустился ниже конца вертикальной трубки.

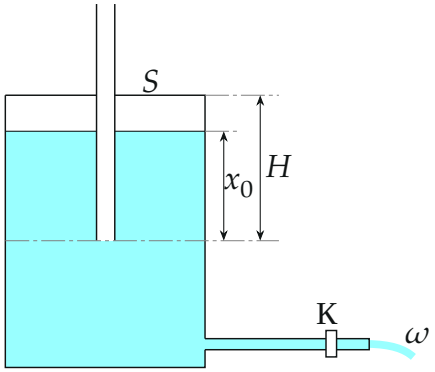

Рис. 1

1. Чему равна масса m_0 воздуха в сосуде над водой в начальный момент времени?
2. Чему равна скорость μ изменения массы воздуха в сосуде в начальный момент времени?

3. С какой скоростью β изменяется μ (скорость изменения массы воздуха в сосуде) в процессе вытекания воды из него?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику и уравнение состояния идеального газа. Нижний конец трубки — единственное место в сосуде, где давление «привязано» к атмосфере: там воздух трубки касается воды, и давление равно p_0. Поэтому давление воздуха над водой определяется высотой воды над концом трубки: чем ниже уровень, тем ближе оно к p_0. Вода вытекает, уровень опускается, объём воздуха растёт, давление растёт — масса воздуха растёт за счёт пузырьков из трубки. Масса — произведение двух линейных по времени величин, p и V, значит, $m(t)$ — парабола, $\mu = dm/dt$ — прямая, а β — постоянная.

Обозначения. x — высота уровня воды над нижним концом трубки в момент t; p — давление воздуха над водой; V — объём воздуха над водой; ρ — плотность воды; M — молярная масса воздуха; R — универсальная газовая постоянная.

1. Давление воздуха над водой. Вода в сосуде (почти) покоится: пузырьки проходят медленно, а скорость опускания уровня мала. Нижний конец трубки — граница воды с воздухом трубки, давление там p_0 (воздух в трубке сообщается с атмосферой, его весом пренебрегаем). Гидростатика воды от поверхности до конца трубки (рис. 2):

$$p + \rho g x = p_0 \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 - \rho g x.$$

Давление воздуха меньше атмосферного. Это и есть принцип сосуда Мариотта: давление у конца трубки, а значит, и у крана, постоянно, пока уровень выше конца трубки, — поэтому расход ω постоянен.

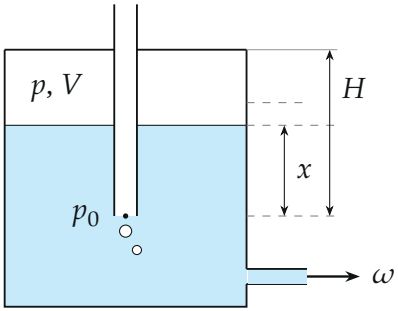

Рис. 2. Сосуд в момент t: уровень опустился (пунктир выше — начальный уровень x_0), у конца трубки давление p_0, над водой — $p = p_0 - \rho g x$; воздух входит пузырьками

2. Уровень и объём воздуха. За время t вытекло ωt воды; столько же объёма занял вошедший воздух (трубка тонкая, её объёмом пренебрегаем). Уровень в цилиндре площадью S опустился на $\omega t/S$:

$$x = x_0 - \frac{\omega t}{S}, \qquad V = S(H - x_0) + \omega t.$$

Давление воздуха из п. 1 тоже линейно по времени:

$$p = p_0 - \rho g x_0 + \rho g \frac{\omega t}{S}.$$

Профиль давления по высоте в сосуде показан на рис. 3: он сдвигается вправо по мере опускания уровня, а давление у конца трубки остаётся p_0.

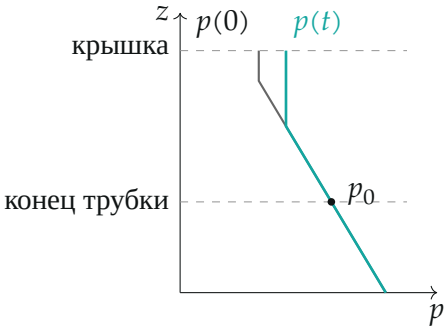

Рис. 3. Давление по высоте сосуда: серый — в начале, бирюзовый — в момент t. В воздухе давление постоянно, в воде растёт вниз на ρg на метр; все профили проходят через p_0 у конца трубки

Пункт 1. Начальная масса. Уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха над водой, $pV = \frac{m}{M}RT$, при $t = 0$:

$$m_0 = \frac{M}{RT}\, p(0) V(0) = \frac{M}{RT}\, (p_0 - \rho g x_0)\, S(H - x_0).$$

Пункт 2. Скорость изменения массы. В любой момент

$$m(t) = \frac{M}{RT}\Big(p_0 - \rho g x_0 + \frac{\rho g \omega t}{S}\Big)(S(H - x_0) + \omega t).$$

Производная произведения, $\frac{d(pV)}{dt} = \frac{dp}{dt}V + p\frac{dV}{dt}$, где $\frac{dp}{dt} = \frac{\rho g \omega}{S}$, $\frac{dV}{dt} = \omega$:

$$\mu = \frac{M}{RT}\Big[\frac{\rho g \omega}{S}(S(H - x_0) + \omega t) + \omega\Big(p_0 - \rho g x_0 + \frac{\rho g \omega t}{S}\Big)\Big] =$$
$$= \frac{M\omega}{RT}\Big[p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0 + \frac{2\rho g \omega t}{S}\Big].$$

В начальный момент

$$\mu(0) = \frac{M\omega}{RT}(p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0).$$

Знак: $p_0 \gg \rho g H$ для обычного сосуда, поэтому $\mu > 0$ — воздух входит в сосуд.

Пункт 3. Скорость изменения μ. Выражение для μ линейно по t, коэффициент при t и есть β:

$$\beta = \frac{d\mu}{dt} = \frac{2M\rho g \omega^2}{RTS} = \text{const}.$$

Второй способ: $m = \frac{M}{RT}pV$, обе величины меняются с постоянными скоростями, поэтому $\frac{d^2(pV)}{dt^2} = 2\frac{dp}{dt}\frac{dV}{dt} = 2\frac{\rho g \omega}{S}\omega$ — то же. График $\mu(t)$ — рис. 4.

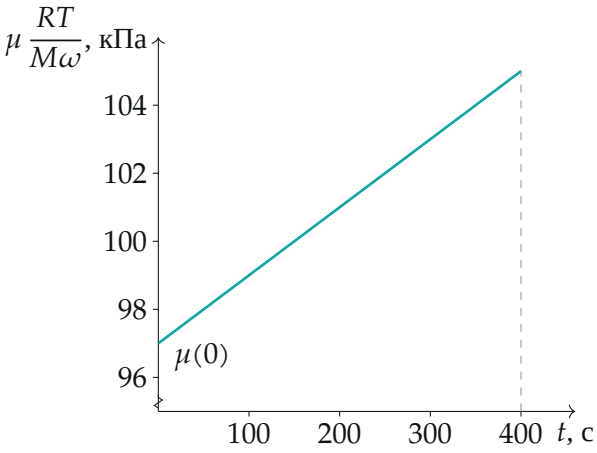

Рис. 4. $\mu(t)$ для примера $p_0 = 100$ кПа, $\rho g H = 5$ кПа, $\rho g x_0 = 4$ кПа, $\omega = 10$ см^3/с, $S = 100$ см^2 (уровень дойдёт до конца трубки через 400 с): прямая с наклоном β

Обратите внимание. Давление воздуха над водой не равно атмосферному, а меньше на $\rho g x$: именно эта поправка даёт рост давления при вытекании и множитель 2 в β. Если считать $p = p_0$, получится $\beta = 0$.

Соберём ответ.

$$m_0 = \frac{MS}{RT}(H - x_0)(p_0 - \rho g x_0), \qquad \mu(0) = \frac{M\omega}{RT}(p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0),$$

$$\beta = \frac{2M\rho g\omega^2}{RTS}.$$

Проверка. Размерности: $\dfrac{\text{кг/моль}}{\text{Дж/моль}} \cdot \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \text{кг}$; μ — то же с ω вместо объёма, кг/с; β — $\frac{\text{кг}}{\text{Дж}} \cdot \frac{\text{Па}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}^6/\text{с}^2}{\text{м}^2} = \text{кг/с}^2$. Предел: $\rho \to 0$ (невесомая жидкость) — давление всё время p_0, масса растёт равномерно: $\mu = \dfrac{M\omega p_0}{RT}$, $\beta = 0$ — верно, формулы это дают. Начальный случай $x_0 = H$ (воздуха над водой нет): $m_0 = 0$, как и должно быть.

Смысл: вошедший воздух заполняет освобождённый водой объём и вдобавок поджимает давление к атмосферному; второе даёт квадратичную добавку к массе.

Ответ. 1) $m_0 = \dfrac{M}{RT} S(H - x_0)(p_0 - \rho g x_0)$; 2) $\mu(0) = \dfrac{M\omega}{RT}(p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0)$; 3) $\beta = \dfrac{2M\rho g\omega^2}{RTS}$ — постоянна.