Зацепился!

Задача 5. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Зацепился!».

На электродвигатель постоянного тока установили датчик температуры. На верхнем этаже стройки поставили лебёдку, приводимую в движение этим двигателем. В начале рабочего дня лебёдка стала поднимать груз массой $M = 67{,}5$ кг. Не доехав всего один этаж до лебёдки, груз зацепился. На каком этаже это произошло? Зависимость температуры двигателя от времени $T(t)$ изображена на рис. 1. Известно, что на двигатель всегда подаётся одно и то же напряжение; трением в подшипниках двигателя и лебёдки пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2, высоту одного этажа 3 м, теплоёмкость электродвигателя $C = 4{,}5$ кДж/°C.

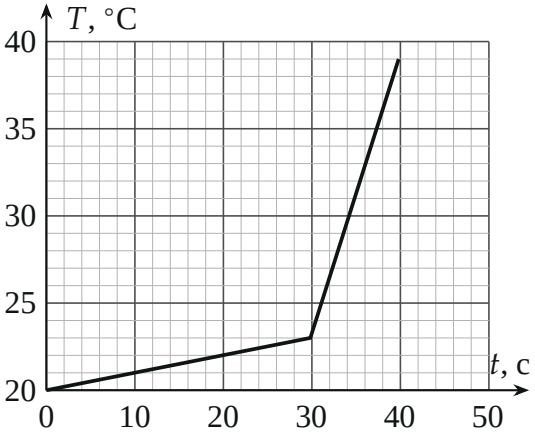

Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон сохранения энергии в электродвигателе постоянного тока. Мощность, которую двигатель берёт из сети, делится на два русла: джоулево тепло в обмотке и механическую работу. Пока груз едет (первый участок графика), часть мощности уходит в подъём; когда груз зацепился, двигатель застопорился — вся мощность идёт в тепло, и температура растёт гораздо быстрее (второй участок). По наклонам двух участков находим тепловые мощности, по ним — механическую мощность, а затем скорость и высоту подъёма.

Тонкость: ток в двигателе зависит от того, вращается ли он, — вращающийся якорь создаёт ЭДС индукции, которая уменьшает ток.

Обозначения. U — напряжение на двигателе; R — сопротивление обмотки; $\mathcal{E}$ — ЭДС индукции вращающегося якоря; I_0 — ток при подъёме, $I_з$ — ток застопоренного двигателя; N_1, N_2 — тепловые мощности на первом и втором участках; $N_м$ — механическая мощность; v — скорость груза; $t_1 = 30$ с — время подъёма; H — высота, на которой груз зацепился.

1. Модель двигателя. Обмотка двигателя — сопротивление R, а вращение якоря в магнитном поле даёт ЭДС $\mathcal{E}$, направленную против тока (рис. 2). Закон Ома для этой цепи: $U = I_0R + \mathcal{E}$. Умножим на I_0 — это закон сохранения энергии для двигателя:

$$UI_0 = I_0^2R + \mathcal{E}I_0 = N_1 + N_м.$$

Трения нет, поэтому вся мощность $\mathcal{E}I_0$ уходит в работу по подъёму груза. Застопоренный двигатель не вращается, $\mathcal{E} = 0$, ток $I_з = U/R$, и вся мощность — тепло: $N_2 = U^2/R$.

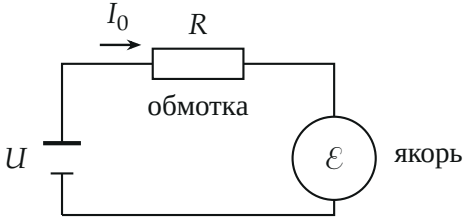

Рис. 2. Эквивалентная схема двигателя постоянного тока: сопротивление обмотки R и ЭДС $\mathcal{E}$ вращающегося якоря (против тока)

2. Как исключить неизвестные U и R. Перемножим тепловые мощности двух режимов:

$$N_1N_2 = I_0^2R \cdot \frac{U^2}{R} = (UI_0)^2 \quad \Longrightarrow \quad UI_0 = \sqrt{N_1N_2},$$

$$N_м = \sqrt{N_1N_2} - N_1.$$

Второй способ того же шага: $\dfrac{N_1}{N_2} = \left(\dfrac{I_0}{I_з}\right)^2$, то есть $I_0 = I_з\sqrt{N_1/N_2}$; тогда $\mathcal{E} = U - I_0R = U(1 - \sqrt{N_1/N_2})$ и $N_м = \mathcal{E}I_0 = UI_0(1 - \sqrt{N_1/N_2})$ — то же.

3. Тепловые мощности по графику. Рабочий день только начался, двигатель холодный, нагрев за 40 с мал, и теплоотдачей в воздух пренебрегаем: всё джоулево тепло идёт на нагрев двигателя, $N = C\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$ — уравнение теплового баланса. Наклоны участков (рис. 1): от 0 до 30 с температура выросла с 20 до 23 °C, от 30 до 40 с — с 23 до 39 °C:

$$N_1 = 4500 \cdot \frac{3}{30}\ \text{Вт} = 450\ \text{Вт}, \qquad N_2 = 4500 \cdot \frac{16}{10}\ \text{Вт} = 7200\ \text{Вт}.$$

4. Механическая мощность и скорость.

$$UI_0 = \sqrt{450 \cdot 7200}\ \text{Вт} = 1800\ \text{Вт}, \qquad N_м = 1800 - 450 = 1350\ \text{Вт}.$$

Распределение мощности показано на рис. 3. Груз едет равномерно (трения нет, кинетическая энергия постоянна), значит, вся механическая мощность идёт на рост потенциальной энергии: $N_м = Mgv$,

$$v = \frac{N_м}{Mg} = \frac{1350}{67{,}5 \cdot 10}\ \text{м/с} = 2\ \text{м/с}.$$

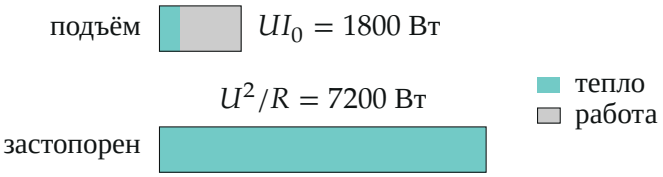

Рис. 3. Куда идёт мощность (полосы в масштабе): при подъёме 450 *Вт тепла и* 1350 *Вт работы, застопоренный двигатель —* 7200 *Вт тепла*

5. Высота и этаж. Груз поднимался $t_1 = 30$ с (излом графика — момент, когда он зацепился):

$$H = vt_1 = 2 \cdot 30\ \text{м} = 60\ \text{м} = 20 \cdot 3\ \text{м}.$$

Груз поднялся ровно на 20 этажей от земли (рис. 4): он на уровне пола 21-го этажа — на границе 20-го и 21-го этажей. Лебёдка на этаж выше, на 22-м этаже.

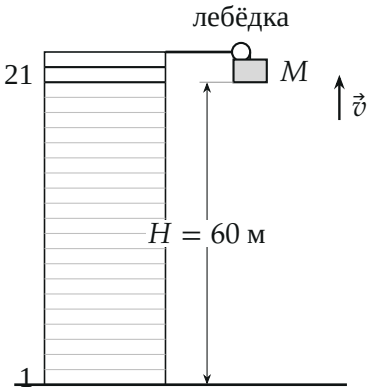

Рис. 4. Стройка в масштабе: 22 этажа по 3 м; груз зацепился на высоте 60 м — у пола 21-го этажа, на этаж ниже лебёдки

Обратите внимание. Ток в двигателе при подъёме и при остановке разный: застопоренный двигатель не создаёт ЭДС, ток в нём в $\sqrt{N_2/N_1} = 4$ раза больше, поэтому тепловая мощность больше в 16 раз. Если считать двигатель просто нагрузкой с постоянным током, получится $N_м = N_2 - N_1$ — неверно.

Соберём ответ.

$$H = \frac{C\left(\sqrt{\dot{T}_1\dot{T}_2} - \dot{T}_1\right)}{Mg}\, t_1 = 60 \text{ м},$$

где $\dot{T}_1 = 0{,}1$ °C/с, $\dot{T}_2 = 1{,}6$ °C/с — наклоны участков.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж}/^\circ\text{C} \cdot {}^\circ\text{C}/\text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{м}$. Предел: если груз невесом, двигатель вращается вхолостую с $\mathcal{E} = U$, ток и нагрев нулевые, $N_1 \to 0$, $N_м \to 0$ — верно. КПД подъёма $1350/1800 = 75\%$ — разумно для двигателя. Скорость 2 м/с (7 км/ч) — обычная для строительной лебёдки.

Смысл: по двум наклонам температуры — «на ходу» и «застопорен» — можно узнать мощность, которую двигатель отдавал грузу, не зная ни напряжения, ни сопротивления.

Ответ. На высоте $H = 60$ м — на уровне пола 21-го этажа (граница 20-го и 21-го этажей); скорость подъёма $v = 2$ м/с, механическая мощность 1350 Вт.