Критическая длина и скорость звука в пластмассовой планке

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, задача 1 (практический тур)] «Критическая длина и скорость звука в пластмассовой планке».

Теоретическое введение.

Если отклонить в поперечном направлении свободный конец вертикально закреплённой с одного конца упругой планки (рис. 1) и отпустить, то возникнут свободные поперечные колебания планки вблизи её вертикального положения. Однако, как несложно убедиться экспериментально, такие колебания возникают только в том случае, если длина ℓ свободного, направленного вверх, конца планки не превышает некоторую критическую длину $\ell_{кр}$. В этом случае вертикальное положение планки устойчиво и при небольшом отклонении она возвращается в исходное равновесное положение. Если же $\ell > \ell_{кр}$, то вертикальное положение планки становится неустойчивым и при небольшом поперечном воздействии равновесие планки нарушается, и она заваливается, сильно изогнувшись под действием собственного веса. При $\ell = \ell_{кр}$ вертикальное положение планки соответствует безразличному равновесию.

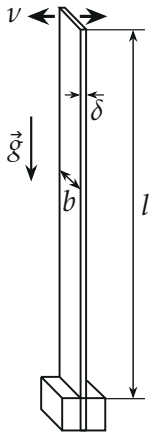


Рис. 1

Критическая длина $\ell_{кр}$, при которой планка теряет устойчивость, определяется плотностью ρ материала планки, его модулем Юнга E и геометрическими размерами свободного конца планки — шириной b и толщиной δ, а также ускорением свободного падения g. Для куба критической длины тонкой ($\delta \ll b$) линейки справедлива формула:

$$\ell_{кр}^3 = \alpha E^m \rho^n b^p \delta^q g^u, \qquad (1)$$

где m, n, p, u — некоторые целые числа, $\alpha \approx 2/3$ — безразмерный коэффициент, $q = 2$.

Такими же параметрами определяется прогиб горизонтально закреплённой планки под влиянием собственного веса (рис. 2). Так, максимальное смещение y конца тонкой планки длиной ℓ (так называемая стрела прогиба) можно определить по формуле:

$$y = \beta E^k \rho^r b^s \delta^t g^h \ell^f, \qquad (2)$$

где k, r, s, h, f — некоторые целые числа, $\beta = 3/2$ — безразмерный коэффициент, $t = -2$.

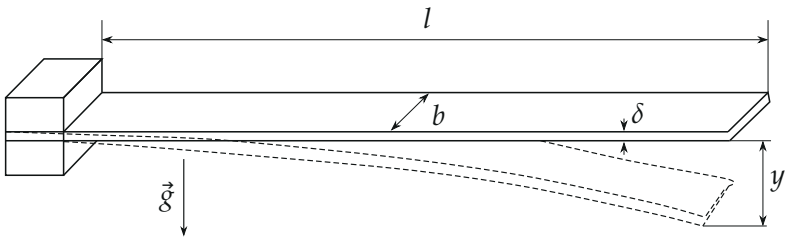


Рис. 2

Отметим, что формула (2) справедлива при условии малости прогиба $y < 0{,}5\,\ell$.

Как правило, непосредственно измерить критическую длину $\ell_{кр}$ весьма сложно: вблизи критической длины из-за множества случайных факторов, таких как небольшое отклонение от вертикали, неровности, неоднородность материала, планка ведёт себя совершенно непредсказуемо.

Точность такого опыта будет невелика. Более точно критическую длину можно определить путём экстраполяции какой-либо величины, зависящей от длины планки, в критическую область. Такой величиной, в частности, является период T (частота $\nu = 1/T$) поперечных колебаний свободного конца планки. Несложно догадаться, какой период (частота) соответствует критической длине. Это позволяет путём линейной экстраполяции зависимости $\nu(\ell)$ в критическую область достаточно точно определить $\ell_{\text{кр}}$. (Кстати, именно таким способом определяются, в частности, температуры различных фазовых переходов: при этом исследуются свойства вещества вблизи температуры фазового перехода, а сама температура определяется путём экстраполяции.)

В заключение напомним, что модуль Юнга — одна из важных характеристик, определяющая упругие свойства изотропного материала. По закону Гука относительная деформация ε стержня под действием силы F, приложенной перпендикулярно плоскости его поперечного сечения площадью S, равна: $\varepsilon = \Delta\ell/\ell = F/(ES)$. Модуль Юнга входит в формулу для скорости звука в различных материалах. Если по торцу тонкого стержня ударить молотком, то по стержню побежит звуковая волна со скоростью $c_{\text{зв}} = (E/\rho)^{1/2}$. Для стали с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7{,}9$ г/см^3 эта скорость равна $c_{\text{зв}} = (E/\rho)^{1/2} \approx 5$ км/с.

Цель работы. В данной работе экспериментально определяется критическая длина тонкой ($\delta \ll b$) пластиковой планки. По величине критической длины определяется скорость звука в пластике, из которого изготовлена планка. В работе потребуется:

- руководствуясь общефизическими соображениями, экспериментальными результатами и методом размерностей определить показатели степеней в формулах (1) и (2);
- экспериментально определить численное значение критической длины $\ell_{\text{кр}}$ двумя способами: 1) по периоду колебаний вертикально закреплённой планки; 2) по стреле прогиба горизонтально закреплённой планки;
- используя экспериментальные результаты, определить скорость звука в материале (пластике), из которого изготовлена планка.

Оборудование. Пластиковая планка толщиной $\delta = 0{,}7$ мм; секундо-

мер; деревянная линейка длиной 50 см; прижимная планка, портняжный метр; две канцелярские клипсы (48 мм); миллиметровая бумага формата А4 (2 листа); чистый лист бумаги формата А4. Ножницы выдаются по требованию.

Задание.

1. С помощью чистого листа А4 исследуйте зависимость $y \sim b^s$ (напомним, что s — целое число). Приведите рисунок, поясняющий, как вы проводите данную часть эксперимента.
2. Руководствуясь экспериментальными результатами и методом размерностей, определите показатели степеней в формулах (1) и (2).
3. Путём непосредственного измерения сделайте оценку $\ell_{кр}$.
4. Снимите экспериментальную зависимость периода T свободных колебаний от длины ℓ свободного конца вертикально закреплённой планки $T(\ell)$ (свободный конец планки направлен вверх). Для каждого значения ℓ проделайте как минимум 2 измерения, при этом общее время колебаний в пределах одного опыта не должно быть меньше 5–10 с. Измерения проведите для $\ell \geq (0{,}6\text{–}0{,}7)\,\ell_{кр}$.
5. Постройте график зависимости частоты колебаний ν от длины ℓ колеблющейся части планки $\nu(\ell)$.
6. Проведите через нанесённые точки наилучшую прямую и путём линейной экстраполяции определите $\ell_{кр}$.
7. По значению $\ell_{кр}$, полученному в п. 6, определите скорость звука $c_{зв\ I}$ в материале планки.
8. Снимите зависимость стрелы прогиба y от длины свободного конца ℓ горизонтально закреплённой планки $y(\ell)$. Измерения проводите в таком диапазоне, для которого $y < 0{,}5\,\ell$.
9. Выразите y через $\ell_{кр}$ и ℓ. Запишите полученную формулу $y = y(\ell_{кр}, \ell)$.
10. По результатам измерений в п. 8 постройте график в подходящих координатах и из него определите $\ell_{кр}$. Сравните полученное значение со значением $\ell_{кр}$, полученным методом колебаний (п. 6).
11. По значению $\ell_{кр}$, полученному в п. 10, определите скорость звука

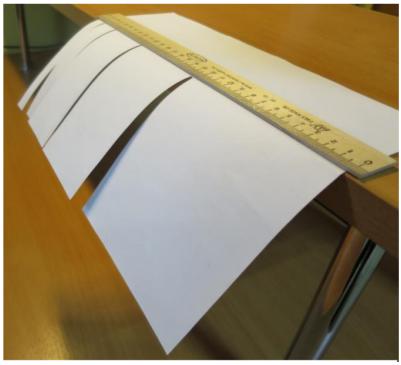
$c_{\text{зв II}}$ в материале планки.

12. Сравните значения $c_{\text{зв I}}$ и $c_{\text{зв II}}$. Сделайте выводы.

Примечание 1: при малых деформациях планки $y \sim F$, где F — сила, приложенная к планке. Примечание 2: в формулах (1) и (2) параметр b входит в одной и той же степени.

▲ **Решение. Что происходит.** Два независимых опыта меряют одну и ту же комбинацию $E\delta^2/(\rho g)$ — куб критической длины. Метод размерностей связывает формулы (1) и (2) и показывает, что прогиб выражается через $\ell_{\text{кр}}$ без лишних констант: $y = \ell^4/\ell_{\text{кр}}^3$. В опыте с колебаниями возвращающая сила обращается в нуль при $\ell = \ell_{\text{кр}}$ — частота стремится к нулю, и $\ell_{\text{кр}}$ находим экстраполяцией $\nu(\ell)$ к $\nu = 0$. Скорость звука — из $c_{\text{зв}}^2 = E/\rho$. Данные измерений — из официального решения.

Пункт 1. Зависимость от ширины. Лист А4 надрезаем вдоль на полоски разной ширины и зажимаем край листа между линейкой и столом так, чтобы полоски свешивались горизонтально на одну и ту же длину. Концы всех полосок провисают одинаково (в пределах неоднородности бумаги). Значит, прогиб от ширины не зависит: $s = 0$, а по примечанию 2 и $p = 0$. Физически это понятно: вес полоски и её жёсткость на изгиб оба пропорциональны ширине.



Опыт организаторов: полоски разной ширины провисают одинаково

Пункт 2. Показатели степеней. Размерности: $[E] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1}\text{с}^{-2}$, $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $[g] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$, $[\delta] = [\ell] = \text{м}$.

Формула (2). Прогиб пропорционален силе (примечание 1), а сила тяжести планки $\propto g$, поэтому $h = 1$. Приравняем показатели при кг, с, м (с $t = -2$, $s = 0$):

$$\text{кг}: \ k + r = 0; \qquad \text{с}: \ -2k - 2h = 0 \ \Rightarrow \ k = -1, \ r = 1;$$

$$\text{м}: \ -k - 3r + h + f - 2 = 1 \ \Rightarrow \ f = 4.$$

Формула (1) (с $q = 2$, $p = 0$): кг: $m + n = 0$; с: $-2m - 2u = 0$; м: $-m - 3n + u + 2 = 3$, откуда $m = 1$, $n = -1$, $u = -1$. Итак,

$$\ell_{\text{кр}}^3 = \frac{2E\delta^2}{3\rho g}, \qquad y = \frac{3\rho g\,\ell^4}{2E\delta^2} = \frac{\ell^4}{\ell_{\text{кр}}^3} \quad (\alpha\beta = 1). \qquad (3)$$

Со скоростью звука $c_{\text{зв}}^2 = E/\rho$: $\ell_{\text{кр}}^3 = \dfrac{2c_{\text{зв}}^2\delta^2}{3g}$, то есть

$$c_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{3g\,\ell_{\text{кр}}^3}{2\delta^2}}. \qquad (4)$$

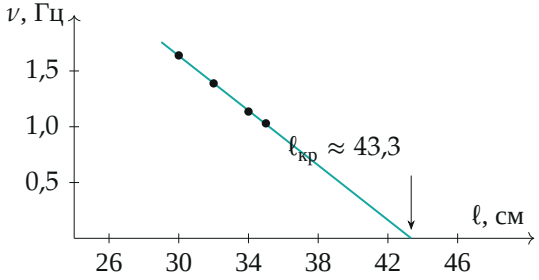
Пункт 3. Прямая оценка. Удлиняя торчащий вверх конец, замечаем длину, при которой планка начинает заваливаться: $\ell_{\text{кр}} \approx$ 45–50 см (грубо: вблизи порога планка ведёт себя непредсказуемо).

Пункты 4–6. Колебания вертикальной планки. Для каждой длины время 10 колебаний меряем дважды, T — среднее. Данные организаторов:

ℓ, см	30	32	34	35
T, с	0,61	0,72	0,88	0,97
$\nu = 1/T$, Гц	1,64	1,39	1,14	1,03

Почему экстраполируем к нулю: при $\ell \to \ell_{\text{кр}}$ равновесие становится безразличным, возвращающая сила исчезает, $T \to \infty$, $\nu \to 0$. Метод наименьших квадратов (python) даёт прямую $\nu = 5{,}32 - 0{,}1227\,\ell$ (ℓ в см), её пересечение с осью:

$$\ell_{\text{кр}} = \frac{5{,}32}{0{,}1227} = 43{,}3 \pm 1 \text{ см}.$$



Частота колебаний от длины свободного конца: точки — измерения, прямая — МНК, продолжена до $\nu = 0$

Пункт 7. По (4) с $\delta = 0{,}7$ мм:

$$c_{\text{зв I}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}433^3}{2 \cdot (0{,}7 \cdot 10^{-3})^2}} \approx 1{,}56 \text{ км/с}.$$

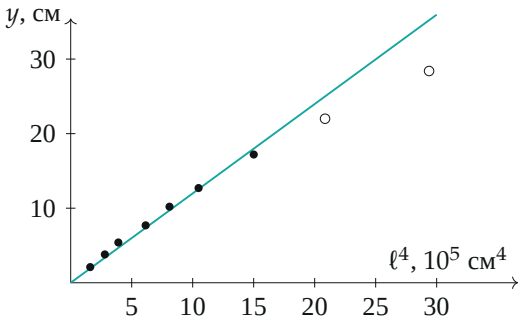
Погрешность: $c \propto \ell_{\text{кр}}^{3/2}$, поэтому $\Delta c/c = 1{,}5\,\Delta\ell/\ell \approx 3{,}5\,\%$, $c_{\text{зв I}} = 1{,}56 \pm 0{,}06$ км/с.

Пункты 8–10. Прогиб горизонтальной планки. Из (3) $y = \ell^4/\ell_{\text{кр}}^3$ — в координатах (ℓ^4, y) прямая через начало с наклоном $A = 1/\ell_{\text{кр}}^3$. Данные организаторов:

ℓ, см	ℓ^4, 10^5 см^4	y, см	ℓ, см	ℓ^4, 10^5 см^4	y, см
20	1,60	2,1	32	10,5	12,7
23	2,80	3,8	35	15,0	17,2
25	3,91	5,4	38	20,9	22
28	6,15	7,7	41,4	29,4	28,4
30	8,10	10,2			

Две последние точки нарушают условие $y < 0{,}5\ell$ ($22 > 19$, $28{,}4 > 20{,}7$) — формула (2) для них неприменима, их в обработку не берём. МНК по прямой через начало для остальных семи точек: $A = 1{,}20 \cdot 10^{-5}$ см$^{-3}$,

$$\ell_{\text{кр}} = A^{-1/3} = 43{,}7 \pm 1 \text{ см}.$$



Прогиб от ℓ^4: закрашенные точки ($y < 0{,}5\ell$) лежат на прямой через начало; светлые — вне области применимости

Пункт 11. По (4):

$$c_{\text{зв II}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}437^3}{2 \cdot (0{,}7 \cdot 10^{-3})^2}} \approx 1{,}58 \pm 0{,}06 \text{ км/с}.$$

Пункт 12. Сравнение. $c_{\text{зв I}}$ и $c_{\text{зв II}}$ различаются на 1,5 % — меньше погрешности; критические длины 43,3 и 43,7 см тоже совпадают. Оба метода согласуются, и грубая прямая оценка (45–50 см) завышена, как и ожидалось: вблизи порога планка ещё «держится» за счёт неидеальности.

Обратите внимание: у организаторов $\ell_{\text{кр}} = 44{,}8$ см по прогибу получено с учётом всех точек, в том числе двух с $y > 0{,}5\ell$, где формула не работает; без них результат ближе к методу колебаний.

Проверка. Размерность (4): $\sqrt{\text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^3/\text{м}^2} = \text{м/с}$. Порядок: скорость звука в пластмассах 1–2 км/с — в несколько раз меньше, чем в стали (5 км/с), как и должно быть для мягкого материала.

Ответ. $m = 1$, $n = -1$, $p = 0$, $u = -1$; $k = -1$, $r = 1$, $s = 0$, $h = 1$, $f = 4$; $y = \ell^4/\ell_{\text{кр}}^3$; $\ell_{\text{кр}} \approx$ 45–50 см (прямо), 43 ± 1 см (колебания), 44 ± 1 см (прогиб); $c_{\text{зв I}} \approx 1{,}56$ км/с, $c_{\text{зв II}} \approx 1{,}58$ км/с (по данным измерений организаторов).