Чёрная звезда

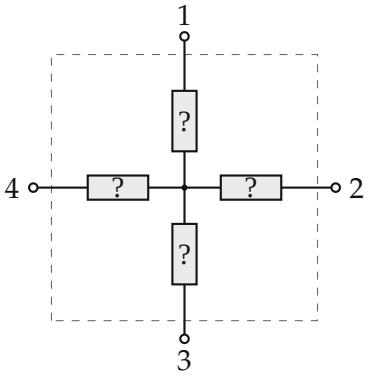
Задача 2. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 2] «Чёрная звезда».

В чёрном ящике с четырьмя выводами находятся четыре элемента, соединённые звездой. В каждом луче звезды содержится только один элемент. Этими элементами могут быть: резисторы, диоды, конденсаторы, катушки индуктивности, батарейки.

1. Определите, какие элементы находятся в лучах звезды, и, в случае обнаружения резисторов, определите их сопротивления.
2. Определите внутреннее сопротивление мультиметра в режиме вольтметра (диапазон 20 В).
3. Определите напряжение на выходе мультиметра, включённого в режиме омметра в диапазоне 2000 кОм.

Приборы и оборудование: чёрный ящик, мультиметр.

Внимание! Отклеивать наклейки с чёрного ящика категорически запрещается!



Поясняющий рисунок: звезда из четырёх неизвестных элементов с выводами 1–4

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача «чёрный ящик» на законы постоянного тока и зарядку конденсатора. У звезды любые два вывода соединены через два элемента последовательно, а

два других луча висят без тока. Поэтому омметр между выводами i и j показывает сумму сопротивлений лучей i и j — три пары без общего «странного» луча дают три уравнения на три резистора. Тип элементов узнаём по поведению показаний: батарейку выдаёт вольтметр, диод — зависимость от полярности, конденсатор — показание, растущее со временем до бесконечности. Конденсатор потом служит «запоминающим вольтметром»: зарядим его от омметра до напряжения его выхода U_0 и разрядим через вольтметр — первое показание зависит от U_0 и R_V; два разных резистора в цепи дают два уравнения.

Обозначения. R_{ij} — показание омметра между выводами i и j; R_2, R_3, R_4 — сопротивления лучей; C — конденсатор; U_0 — напряжение на выходе омметра без нагрузки; R_V — сопротивление вольтметра; U_{1j} — первое (наибольшее) показание вольтметра на выводах 1 и j после зарядки.

1. Батареек нет. Вольтметр между всеми парами выводов показывает ноль — в лучах нет источников.

2. Показания омметра (диапазон 2000 кОм) — плюс щупа на вывод из столбца, минус — из строки; два независимых набора дали одинаковое с точностью ± 3 кОм:

	1	2	3	4	
1	–	∞	∞	∞	
2	∞	–	833	1092	кОм
3	∞	833	–	1383	
4	∞	1091	1382	–	

Пары с выводом 1 в итоге показывают «бесконечность», но не сразу: показание растёт и через 10–20 с выходит за предел. Остальные показания постоянны и не зависят от полярности.

3. Что в лучах. Разберём по элементам:

- *Луч 1 — конденсатор.* Омметр пропускает через измеряемое сопротивление ток от своего источника и показывает U/I. Через конденсатор ток идёт, пока он заряжается, и спадает до нуля — показание растёт до бесконечности (рис. 2). Так ведёт себя только кон-

денсатор. Резистор дал бы постоянное, диод — постоянное (малое в одну сторону и бесконечное в другую), катушка — почти нулевое сопротивление.

- *Катушки нет.* Сопротивление обмотки катушки почти нулевое, её установление ($L/R \lesssim 10^{-4}$ с) незаметно. Будь катушка, например, в луче 2, было бы $R_{23} = R_3$, $R_{24} = R_4$, $R_{34} = R_3 + R_4 = R_{23} + R_{24} = 1924$ кОм, а измерено 1382 кОм. Так же проверяются лучи 3 и 4 — ни одно показание не равно сумме двух других.
- *Диодов нет.* Показания между 2, 3, 4 не зависят от полярности ($R_{23} = R_{32}$ и т. д.).

Итак, в луче 1 — конденсатор, в лучах 2, 3, 4 — резисторы (рис. 3).

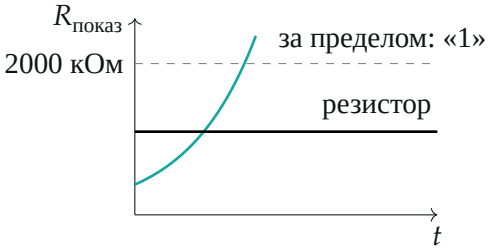


Рис. 2. Показание омметра во времени (качественно): с конденсатором в цепи ток спадает, показание растёт и уходит за предел; с резисторами — постоянно

4. Сопротивления. Пара ij из выводов 2, 3, 4 — два резистора последовательно (ток через лучи 1 и третий резистор не идёт): $R_{23} = R_2 + R_3 = 833$ кОм, $R_{24} = R_2 + R_4 = 1091$ кОм, $R_{34} = R_3 + R_4 = 1382$ кОм. Сложим все три и вычтем по одному:

$$R_2 = \frac{R_{23} + R_{24} - R_{34}}{2} = 271\,\text{кОм}, \qquad R_3 = \frac{R_{23} + R_{34} - R_{24}}{2} = 562\,\text{кОм},$$

$$R_4 = \frac{R_{24} + R_{34} - R_{23}}{2} = 820\,\text{кОм}.$$

Погрешность каждого $\approx \pm 3$ кОм (1% и разброс таблиц).

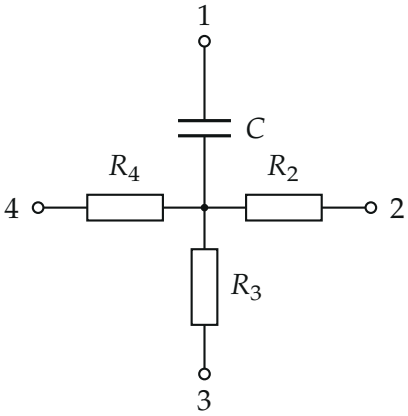


Рис. 3. Содержимое ящика: конденсатор в луче 1, резисторы $R_2 = 271$, $R_3 = 562$, $R_4 = 820$ кОм

5. Зарядка конденсатора от омметра. Подключаем омметр (2000 кОм) к выводам 1 и 2 не меньше чем на пять минут (рис. 4а): ток через C и R_2 спадает до нуля, падение напряжения на R_2 и на внутреннем сопротивлении омметра исчезает, и конденсатор заряжается до напряжения выхода омметра без нагрузки U_0.

6. Разрядка через вольтметр. Отключаем омметр и сразу подключаем вольтметр к выводам 1 и 2 (рис. 4б). Конденсатор разряжается через R_2 и R_V последовательно; в первый момент напряжение на нём ещё U_0, ток $U_0/(R_2 + R_V)$, и вольтметр показывает (закон Ома для цепи, делитель напряжения)

$$U_{12} = \frac{U_0 R_V}{R_V + R_2} = 0{,}227 \text{ В}. \qquad (1)$$

Дальше показание падает — записываем максимальное. Повторяем зарядку и разряжаем через R_3 (выводы 1 и 3) и через R_4:

$$U_{13} = \frac{U_0 R_V}{R_V + R_3} = 0{,}184 \text{ В}, \qquad U_{14} = \frac{U_0 R_V}{R_V + R_4} = 0{,}159 \text{ В}. \qquad (2)$$

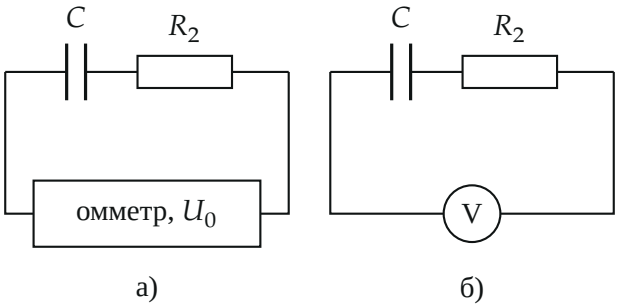


Рис. 4. а) Зарядка конденсатора от омметра через R_2 (до U_0); б) разрядка через R_2 и вольтметр: первое показание $U_0R_V/(R_V+R_2)$

7. Решение и обработка. Перевернём (1)–(2): $\dfrac{1}{U_{1j}} = \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{R_j}{U_0R_V}$ — линейная зависимость $1/U$ от R (рис. 5). Из двух точек (R_2, R_3):

$$U_0 = \frac{U_{12}U_{13}(R_3 - R_2)}{U_{13}R_3 - U_{12}R_2} = 0{,}290 \text{ В},$$

$$R_V = \frac{U_{13}R_3 - U_{12}R_2}{U_{12} - U_{13}} = 0{,}97 \text{ МОм}.$$

Прямая по всем трём точкам (метод наименьших квадратов, python): отрезок на оси $1/U_0 = 3{,}48$ В$^{-1}$, наклон $1/(U_0R_V) = 3{,}43 \cdot 10^{-3}$ (В·кОм)$^{-1}$:

$$U_0 = 0{,}287 \text{ В}, \qquad R_V = 1{,}01 \text{ МОм}.$$

Три пары точек дают U_0 от 0,280 до 0,290 В и R_V от 0,97 до 1,08 МОм; отсюда $U_0 = (0{,}29 \pm 0{,}01)$ В, $R_V = (1{,}0 \pm 0{,}1)$ МОм.

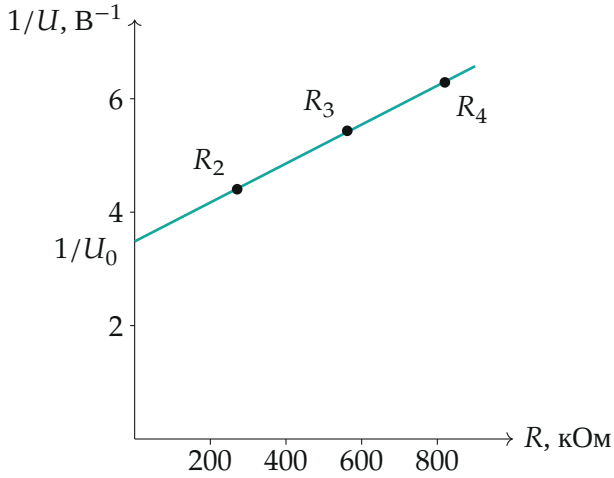


Рис. 5. $1/U_{1j}$ *от сопротивления луча: точки — измерения, прямая — метод наименьших квадратов; пересечение с осью —* $1/U_0$*, наклон —* $1/(U_0 R_V)$

Обратите внимание. Брать нужно *максимальное* показание вольтметра сразу после подключения: конденсатор разряжается через вольтметр с постоянной времени $C(R_V + R_j)$, и позже показание меньше. После каждого опыта конденсатор разряжаем (замыкаем 1 на любой вывод), проверяя вольтметром, что напряжение ноль. Руками контактов не касаемся — сопротивление тела сотни килоом.

Соберём ответ.

$$R_2 = \tfrac{1}{2}(R_{23} + R_{24} - R_{34}),\ \ldots;$$

$$U_0 = \frac{U_{12}U_{13}(R_3 - R_2)}{U_{13}R_3 - U_{12}R_2}, \qquad R_V = \frac{U_{13}R_3 - U_{12}R_2}{U_{12} - U_{13}}.$$

У организаторов $U_0 \approx 0{,}28$ В — в пределах разброса, но по их же числам формула даёт 0,29 В.

Проверка. Третья точка (вывод 4) не участвовала в расчёте по двум первым и легла на ту же прямую: по $U_0 = 0{,}290$ В, $R_V = 0{,}97$ МОм ожидаем $U_{14} = 0{,}290 \cdot 0{,}97/(0{,}97 + 0{,}82) = 0{,}158$ В, измерено 0,159 В. $R_V \approx 1$ МОм — типично для цифровых мультиметров на пределе 20 В; ток выхода омметра без нагрузки $\sim U_0/r$ — доли микроампера, как и

нужно для мегаомного предела.

Смысл: конденсатор в ящике — одновременно «улика» (по росту показаний) и инструмент: он запоминает напряжение омметра и отдаёт его вольтметру.

Ответ. 1) Луч 1 — конденсатор, лучи 2, 3, 4 — резисторы $R_2 \approx 271$ кОм, $R_3 \approx 562$ кОм, $R_4 \approx 820$ кОм; 2) $R_V = (1{,}0 \pm 0{,}1)$ МОм; 3) $U_0 = (0{,}29 \pm 0{,}01)$ В.