Сообщающиеся сосуды

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Сообщающиеся сосуды».

В двух одинаковых сообщающихся вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотности ρ. Первоначальный уровень жидкости в сосудах $l = 10$ см от дна (рис. 1). Сосуды соединены через отверстия в их дне маленькой трубочкой пренебрежимо малого объёма. В левом сосуде на высоте $2l$ от дна находится лёгкий поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 2\rho g l$. С момента времени $t = 0$ в левый сосуд в пространство над поршнем начинает поступать жидкость плотности ρ, причём скорость прироста её уровня над поршнем составляет $v = 0{,}2$ мм/с.

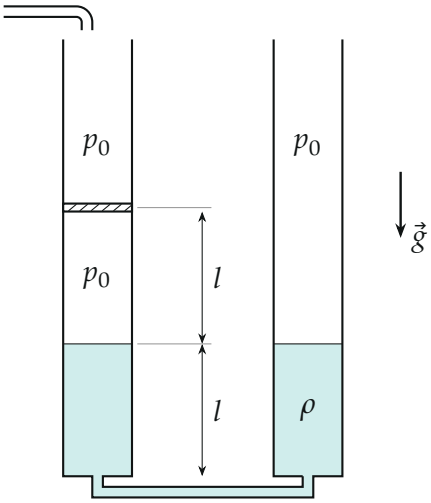


Рис. 1

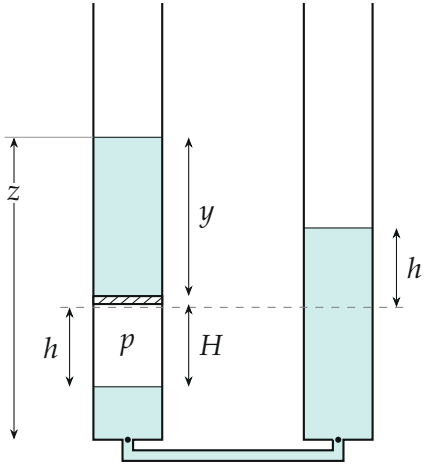
1. С какой скоростью движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?
2. С какой скоростью и в каком направлении (вверх или вниз) движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?

3. На какой высоте z от дна сосуда будет находиться поверхность жидкости над поршнем: а) через 600 с? б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

▲ **Решение. Что происходит.** Жидкость, налитая на лёгкий поршень, давит на воздух под ним, воздух — на жидкость левого сосуда, и та перетекает в правый. Слой над поршнем растёт, а сам поршень опускается: уходит жидкость под ним и сжимается воздух. Это гидростатика сообщающихся сосудов плюс закон Бойля–Мариотта; когда жидкость из-под поршня уйдёт вся, воздух выйдет пузырями через трубочку.

Обозначения. $y = vt$ — толщина слоя жидкости над поршнем; h — на сколько опустился уровень жидкости под поршнем (и поднялся в правом: сосуды одинаковы); H — высота столба воздуха; p — давление воздуха; z — высота верхней поверхности над дном.



Сосуды в произвольный момент t (масштаб — для $t = 600$ с): уровень под поршнем опустился на h, в правом сосуде поднялся на h; пунктир — начальный уровень l

1. Давление воздуха. Поршень лёгкий, поэтому силы давления на него сверху и снизу равны (второй закон Ньютона для невесомого поршня): $p = p_0 + \rho g y$.

2. Равновесие жидкости в сосудах. Жидкость в сосудах и трубочке покоится, поэтому давление на дне левого и правого сосудов одинаково (точки на одном уровне в связной покоящейся жидкости). Слева над дном столб жидкости $l - h$ и воздух под давлением p, справа — столб $l + h$ и атмосфера:

$$p_0 + \rho g y + \rho g (l - h) = p_0 + \rho g (l + h) \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{y}{2} = \frac{vt}{2}.$$

Это верно в любой момент, пока под поршнем есть жидкость ($h \leq l$).

Пункт 1. Скорость поверхности в правом сосуде. Уровень в правом сосуде $l + h = l + vt/2$, поэтому он поднимается со скоростью

$$v_\text{п} = \frac{dh}{dt} = \frac{v}{2} = 0{,}1 \text{ мм/с}.$$

3. Высота столба воздуха. Температура постоянна, количество воздуха не меняется — закон Бойля–Мариотта для воздуха под поршнем (площадь S сокращается): $p_0 l S = (p_0 + \rho g y) H S$. С $p_0 = 2\rho g l$:

$$H = \frac{l}{1 + \dfrac{\rho g y}{p_0}} = \frac{l}{1 + \dfrac{y}{2l}}.$$

4. Высота верхней поверхности. Сложим снизу вверх: жидкость под поршнем, воздух, слой над поршнем:

$$z = (l - h) + H + y = l + \frac{vt}{2} + \frac{l}{1 + \dfrac{vt}{2l}}. \qquad (1)$$

Пункт 2. Скорость поверхности над поршнем в начале. При малых t (пока $vt \ll l$) второе слагаемое разложим: $\dfrac{l}{1 + vt/2l} \approx l - \dfrac{vt}{2}$, тогда

$$z \approx l + \frac{vt}{2} + l - \frac{vt}{2} = 2l.$$

Скорость поверхности над поршнем в начале равна нулю: слой растёт со скоростью v, а поршень опускается с той же скоростью ($v/2$ — уход жидкости из-под него, $v/2$ — сжатие воздуха). Потом сжатие замедляется, и поверхность начинает подниматься:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v}{2}\Big[1 - \frac{1}{(1 + vt/2l)^2}\Big] > 0.$$

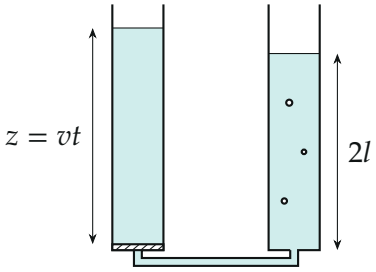
Пункт 3а. Через 600 с. $y = vt = 12$ см, $h = 6$ см $< l$ — жидкость под поршнем ещё есть, формула (1) применима:

$$z = 10 + 6 + \frac{10}{1 + 0{,}6} = 22{,}25 \text{ см}.$$

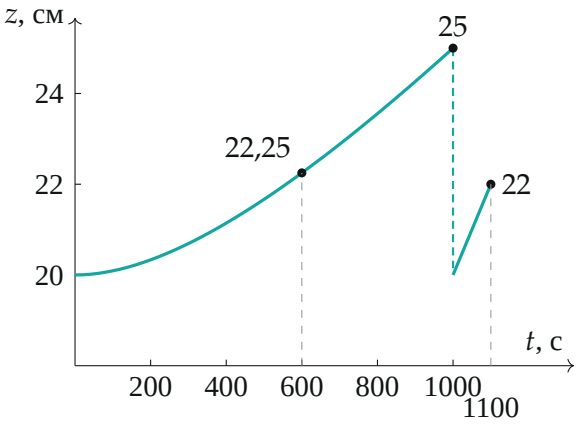
Пункт 3б. Через 1100 с. Формула (1) дала бы $h = vt/2 = 11$ см $> l$ — жидкости под поршнем столько нет. При $t_1 = 2l/v = 1000$ с уровень под поршнем доходит до дна ($h = l$), вся жидкость — в правом сосуде (уровень $2l$), а давление воздуха $p_0 + 2\rho g l$ равно давлению на дне правого сосуда. Дальше давление воздуха больше, он пузырями уходит через трубочку в правый сосуд, и поршень опускается до дна. Слой над поршнем остаётся на нём, поэтому после t_1

$$z = vt = 0{,}02 \text{ см/с} \cdot 1100 \text{ с} = 22 \text{ см}.$$

Обратите внимание: при $t_1 = 1000$ с по формуле (1) $z = 25$ см, а сразу после выхода воздуха поршень падает на дно, и поверхность опускается до $vt = 20$ см.



После t_1: воздух вышел, поршень на дне, жидкость — справа



Высота поверхности над поршнем $z(t)$, построенная по формуле (1) до $t_1 = 1000$ с и по $z = vt$ после (ось z начинается с 18 см). В начале касательная горизонтальна; при t_1 — скачок с 25 до 20 см

Проверка. Размерность (1) — длина. При $t = 0$: $z = l + 0 + l = 2l$ — высота поршня, верно. Предел: при $p_0 \gg \rho g l$ воздух не сжимался бы ($H \approx l$), и $z \approx 2l + vt/2$ росла бы сразу со скоростью $v/2$.

Ответ. 1) $v/2 = 0{,}1$ мм/с вверх; 2) в начале процесса поверхность над поршнем неподвижна (скорость равна нулю), затем начинает подниматься; 3) а) $z = l + \dfrac{vt}{2} + \dfrac{l}{1 + vt/2l} = 22{,}25$ см; б) $z = vt = 22$ см (воздух вышел, поршень на дне).