Стеклоподъёмники

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Стеклоподъёмники».

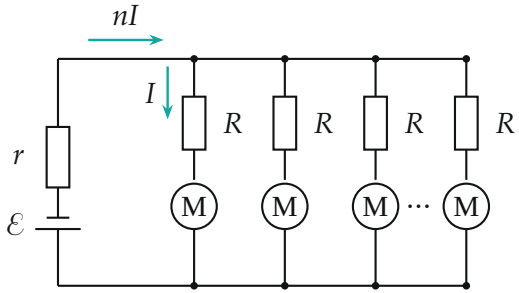
При включении электродвигателя стеклоподъёмника одной двери автомобиля стекло поднимается из нижнего в верхнее положение за время t_1. Если включить одновременно два стеклоподъёмника, то стёкла поднимутся за время t_2 ($t_2 > t_1$).

1. За какое время t_3 поднимутся три стекла автомобиля при одновременной работе трёх стеклоподъёмников?
2. За какое время t_4 поднимутся все четыре стекла автомобиля при одновременной работе всех четырёх стеклоподъёмников?

Примечания. Считайте, что сила, необходимая для подъёма стекла, не зависит от скорости подъёма, а сила тяги F мотора стеклоподъёмника пропорциональна силе тока, идущего через него.

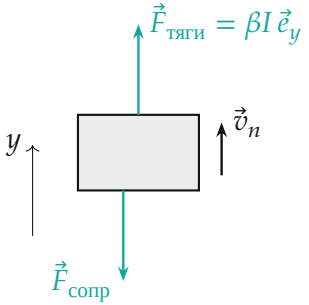
▲ **Решение. Что происходит.** Все моторы питаются от одного аккумулятора с внутренним сопротивлением r и включены параллельно. Стекло поднимается равномерно, значит, сила тяги равна нужной силе F, а она от скорости не зависит — поэтому *ток через каждый мотор один и тот же* при любом числе моторов. Чем больше моторов, тем больше общий ток через аккумулятор, тем больше напряжения «теряется» на r и тем меньше остаётся на полезную работу — стёкла едут медленнее. Ключевой закон — закон сохранения энергии (баланс мощностей) для цепи; главная идея — скорость стекла оказывается линейной функцией числа моторов.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС аккумулятора, r — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление обмотки одного мотора; I — ток через один мотор, $F = \beta I$ — сила тяги; s — ход стекла; n — число работающих моторов, t_n — время подъёма, $v_n = s/t_n$ — скорость стекла.



Моторы M (обмотка R) включены параллельно к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Через каждый мотор — ток I, через аккумулятор — nI

1. Ток через мотор не зависит от n. Стекло движется равномерно, поэтому по второму закону Ньютона для стекла сила тяги мотора равна силе, нужной для подъёма: $\beta I = F$. Сила F от скорости не зависит, значит, и ток $I = F/\beta$ одинаков при любом числе включённых моторов. Общий ток через аккумулятор при n моторах — nI.



Стекло (вместе с механизмом) движется равномерно: тяга мотора уравновешивает силу $F_{сопр} = F$ (тяжесть, трение в уплотнителях), поэтому $\beta I = F$ при любой скорости

2. Баланс мощностей. Закон сохранения энергии для всей цепи за единицу времени: мощность аккумулятора $\mathcal{E} \cdot nI$ идёт на джоулево тепло во внутреннем сопротивлении $(nI)^2 r$, в обмотках $n \cdot I^2 R$ и на механическую работу подъёма n стёкол nFv_n:

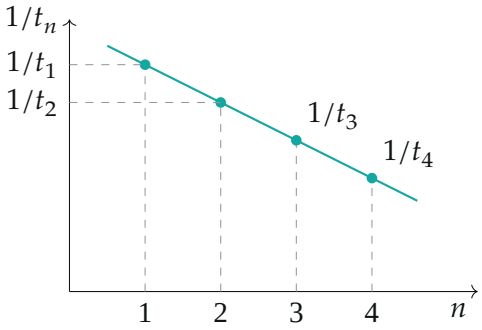
$$\mathcal{E}\, nI = (nI)^2 r + nI^2 R + nFv_n.$$

Разделим на $nF = n\beta I$:

$$v_n = \frac{\mathcal{E} - IR}{\beta} - \frac{Ir}{\beta}n \equiv a - bn, \qquad \frac{1}{t_n} = \frac{v_n}{s} = A - Bn,$$

где A и $B > 0$ не зависят от n. Скорость подъёма — линейная убывающая функция числа моторов. Это и есть главный результат.

3. Тот же результат через напряжение. Мотор с током I и скоростью v создаёт противоЭДС $\varepsilon = Fv/I = \beta v$ (его механическая мощность $\varepsilon I = Fv$). По закону Ома для полной цепи напряжение на зажимах аккумулятора $\mathcal{E} - nIr$, и оно же на каждом моторе: $\mathcal{E} - nIr = IR + \beta v_n$. Отсюда опять $v_n = (\mathcal{E} - IR - nIr)/\beta$ — линейно по n.



$1/t_n$ убывает с числом моторов линейно: точки $n = 1, 2, 3, 4$ лежат на одной прямой с шагом $1/t_1 - 1/t_2$ (масштаб — для $t_2 = 1{,}2\,t_1$)

Пункт 1. Три стекла. Для арифметической прогрессии $1/t_n$ шаг постоянен:

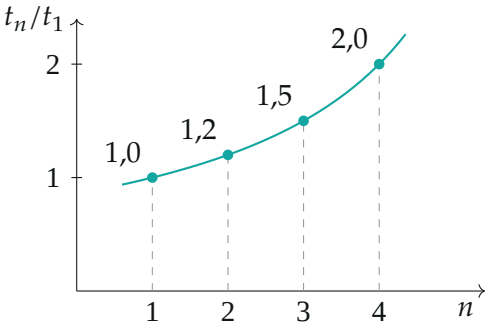
$$\frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_2} - \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = \frac{2}{t_2} - \frac{1}{t_1} \quad \Longrightarrow \quad t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}.$$

Пункт 2. Четыре стекла. Ещё один шаг:

$$\frac{1}{t_4} = \frac{3}{t_2} - \frac{2}{t_1} \quad \Longrightarrow \quad t_4 = \frac{t_1 t_2}{3t_1 - 2t_2}.$$

Обратите внимание: формулы имеют смысл, только пока знаменатель

положителен. Если $t_2 \geq 2t_1$ ($3t_1 \leq 2t_2$ для четырёх), скорость v_n по формуле получается нулевой или отрицательной: напряжения на зажимах не хватает даже на ток I при неподвижном моторе, и стёкла не поднимутся вовсе (моторы «встанут»).



Время подъёма $t_n = 1/(A - Bn)$ растёт быстрее линейного; при $t_2 = 1{,}2\,t_1$ получаем $t_3 = 1{,}5\,t_1$, $t_4 = 2\,t_1$

Проверка. Размерность: время. Предел $r \to 0$ (идеальный аккумулятор): моторы не мешают друг другу, $t_2 = t_1$, и формулы дают $t_3 = t_4 = t_1$ — верно. Пример: $t_2 = 1{,}2\,t_1$ даёт $t_3 = 1{,}2/0{,}8\,t_1 = 1{,}5\,t_1$ и $t_4 = 1{,}2/0{,}6\,t_1 = 2\,t_1$; обратные величины 1; 0,833; 0,667; 0,5 действительно идут с постоянным шагом. Физический смысл: каждый добавленный мотор «отнимает» у остальных одно и то же напряжение Ir на внутреннем сопротивлении аккумулятора.

Ответ. 1) $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}$ (при $t_2 < 2t_1$); 2) $t_4 = \dfrac{t_1 t_2}{3t_1 - 2t_2}$ (при $2t_2 < 3t_1$; иначе стёкла не поднимутся).