Зарядка-разрядка

Задача 3. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Зарядка-разрядка».

В электрической цепи (рис. 1) все элементы можно считать идеальными. Конденсатор ёмкостью C не заряжен. ЭДС батареи ε задана. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасённой в конденсаторе, составляет 75% от максимальной. Найдите количество теплоты, выделившееся в цепи при замкнутом ключе.

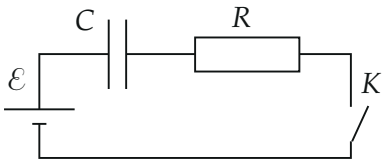


Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** После замыкания ключа конденсатор заряжается через резистор: ток падает от ε/R до нуля, заряд растёт от нуля до $C\varepsilon$. Мощность, идущая в конденсатор, $P = UI$ сначала растёт (растёт напряжение), потом падает (падает ток), то есть проходит через максимум. Значение $0{,}75P_{\max}$ она принимает *дважды* — до максимума и после, поэтому у задачи два ответа. Ключевые законы: закон Ома для полной цепи и закон сохранения энергии (работа батареи = энергия конденсатора + теплота).

Обозначения. q — заряд конденсатора, $I = dq/dt$ — ток в произвольный момент; P — скорость изменения энергии конденсатора; A — работа батареи, W_C — энергия конденсатора, Q — теплота на момент размыкания.

1. Мощность, идущая в конденсатор. Энергия конденсатора $W_C = q^2/2C$; за малое время dt заряд меняется на $dq = I\,dt$, поэтому

$$P = \frac{dW_C}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}I. \qquad (1)$$

2. Закон Ома для полной цепи (обход по контуру: ЭДС равна сумме напряжений на резисторе и конденсаторе):

$$\varepsilon = IR + \frac{q}{C}. \qquad (2)$$

Подставим q/C из (2) в (1):

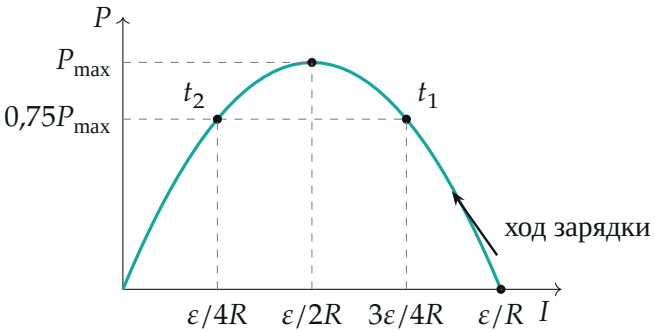
$$P = (\varepsilon - IR)I = \varepsilon I - I^2R. \qquad (3)$$

Это и есть закон сохранения энергии в каждый момент: мощность батареи εI минус джоулева мощность I^2R идёт в конденсатор.

3. Максимум. $P(I)$ — парабола ветвями вниз с нулями $I = 0$ и $I = \varepsilon/R$; вершина посередине:

$$I_* = \frac{\varepsilon}{2R}, \qquad P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4R}.$$

Ток при зарядке пробегает все значения от ε/R до 0, так что максимум действительно достигается.



Мощность, идущая в конденсатор, как функция тока: $P = \varepsilon I - I^2R$. При зарядке ток убывает (стрелка), поэтому сначала проходится точка $I = 3\varepsilon/4R$ (момент t_1), потом $I = \varepsilon/4R$ (момент t_2)

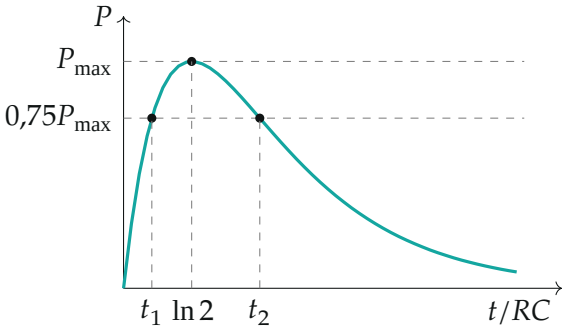
4. Момент размыкания. По условию $P = \frac{3}{4}P_{\max} = \dfrac{3\varepsilon^2}{16R}$. Из (3):

$$I^2 - \frac{\varepsilon}{R}I + \frac{3}{16}\frac{\varepsilon^2}{R^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{2R} \pm \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Два корня — два момента. Заряд из (2): $q = C(\varepsilon - IR)$:

$$t_1:\ I = \frac{3\varepsilon}{4R},\ q_1 = \frac{C\varepsilon}{4}; \qquad t_2:\ I = \frac{\varepsilon}{4R},\ q_2 = \frac{3C\varepsilon}{4}.$$

В зависимости от времени ($q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$) это моменты $t_1 = RC\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}29RC$ и $t_2 = RC\ln 4 \approx 1{,}39RC$ по разные стороны от максимума при $t = RC\ln 2$.



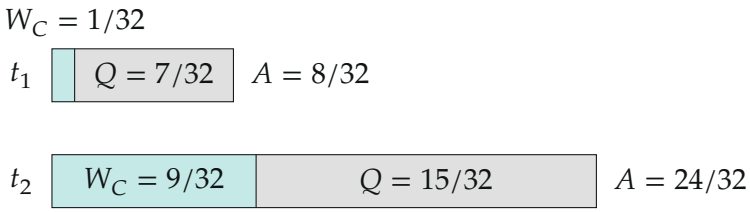
$P(t) = (\varepsilon^2/R)\,e^{-t/RC}(1 - e^{-t/RC})$: уровень $0{,}75P_{\max}$ достигается дважды

5. Теплота. Закон сохранения энергии от замыкания до размыкания ключа: через батарею прошёл заряд q, она совершила работу $A = q\varepsilon$; часть запасена в конденсаторе, остальное выделилось в резисторе:

$$Q = q\varepsilon - \frac{q^2}{2C}.$$

Для двух моментов:

$$Q_1 = \frac{C\varepsilon^2}{4} - \frac{C\varepsilon^2}{32} = \frac{7}{32}C\varepsilon^2, \qquad Q_2 = \frac{3C\varepsilon^2}{4} - \frac{9C\varepsilon^2}{32} = \frac{15}{32}C\varepsilon^2.$$



Куда ушла работа батареи $A = q\varepsilon$ (в единицах $C\varepsilon^2$): бирюза — энергия конденсатора W_C, серое — теплота Q

Обратите внимание: «скорость изменения энергии» равна $0{,}75P_{\max}$ и до, и после максимума — второй ответ легко потерять. Оба момента реальны: ключ можно разомкнуть в любой из них.

Проверка. Размерность $C\varepsilon^2$ — энергия. Предел: после полной зарядки ($q = C\varepsilon$) было бы $Q = C\varepsilon^2/2 = 16C\varepsilon^2/32$ — известное «половина работы батареи уходит в тепло»; оба наших ответа меньше. Второй способ — прямо просуммировать джоулево тепло при $I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$:

$$Q = \int_0^t I^2R\,dt = \frac{C\varepsilon^2}{2}(1 - e^{-2t/RC}),$$

$$Q(t_1) = \frac{C\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{32}C\varepsilon^2, \quad Q(t_2) = \frac{C\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{32}C\varepsilon^2.$$

Ответ. Два ответа: $Q = 7C\varepsilon^2/32$ (ключ разомкнут до максимума мощности, $q = C\varepsilon/4$) или $Q = 15C\varepsilon^2/32$ (после максимума, $q = 3C\varepsilon/4$).