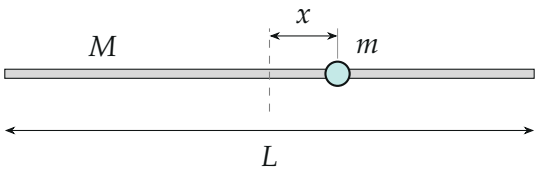
Долго ли умеючи?

Задача 4. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Долго ли умеючи?».

В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1{,}0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0{,}1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.



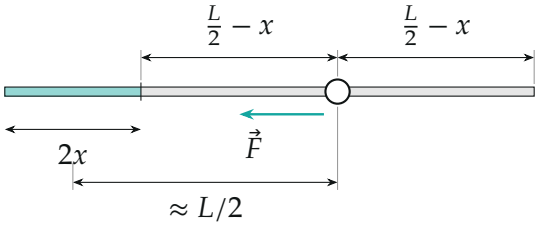
Поясняющий рисунок: бусинка m на стержне M смещена на x от его середины

▲ **Решение. Что происходит.** Других тел нет, на систему «стержень + бусинка» внешние силы не действуют, и её центр масс покоится. Стержень притягивает бусинку; пока бусинка в середине, притяжения левой и правой половин компенсируются, а при смещении на x остаётся нескомпенсированный кусок стержня, который тянет бусинку обратно к середине. Сила возвращающая и (при малом смещении) пропорциональна смещению — это гармонические колебания; середину бусинка впервые достигнет через четверть периода. Двигаются оба тела, поэтому нужно ускорение *относительно стержня*.

Обозначения. x — смещение бусинки относительно середины стержня (ось x вдоль стержня, вправо); $\lambda = M/L$ — масса единицы длины стержня; F — сила притяжения бусинки стержнем; ω, T — круговая частота и период колебаний.

1. Сила со стороны стержня. Разобьём стержень на части. Справа от бусинки — отрезок длины $\frac{L}{2} - x$, слева — длины $\frac{L}{2} + x$. Отрезок длины $\frac{L}{2} - x$ слева, прилегающий к бусинке, расположен симметрично правой

части, и их притяжения взаимно уничтожаются. Нескомпенсированным остаётся крайний левый отрезок длины $2x$, удалённый от бусинки на расстояние $\approx L/2$ (смещение мало, $x \ll L$).

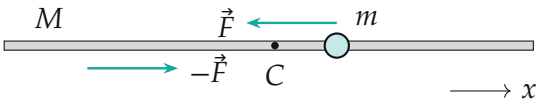


Части стержня по обе стороны от бусинки длиной $\frac{L}{2} - x$ (серые) притягивают её одинаково; остаётся бирюзовый отрезок длины $2x$ на расстоянии $\approx L/2$ — он и даёт силу $\vec{F}$ к середине

По закону всемирного тяготения (отрезок мал по сравнению с расстоянием до него — считаем его точечной массой $\lambda \cdot 2x$):

$$F_x = -\frac{Gm\lambda\, 2x}{(L/2)^2} = -\frac{8GMm}{L^3}\, x.$$

Знак минус: сила направлена к середине стержня, против смещения. Точнее, сумма притяжений двух частей стержня даёт $F_x = -Gm\lambda\left(\frac{1}{L/2 - x} - \frac{1}{L/2 + x}\right) = -\frac{2Gm\lambda x}{(L/2)^2 - x^2}$, что при $x \ll L$ совпадает с приближённым.



Силы взаимного притяжения бусинки и стержня; C — неподвижный центр масс системы (ближе к стержню: $M = 10m$)

2. Ускорения тел. По третьему закону Ньютона бусинка тянет стержень с силой $-\vec{F}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x

для бусинки и для стержня (система отсчёта центра масс инерциальна — внешних сил нет):

$$ma_m = F_x, \qquad Ma_M = -F_x.$$

Ускорение бусинки относительно стержня:

$$a_{\text{отн}} = a_m - a_M = F_x\Big(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\Big) = -\frac{8G(M+m)}{L^3}\,x.$$

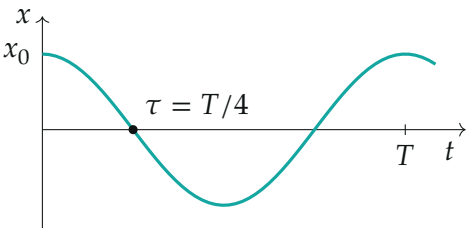
Это уравнение гармонических колебаний $\ddot{x} = -\omega^2 x$ с

$$\omega = \sqrt{\frac{8G(M+m)}{L^3}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi L\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}}.$$

3. Время до середины. В начальный момент бусинка покоится относительно стержня в крайнем положении: $x(t) = x_0\cos\omega t$. Середины ($x = 0$) она впервые достигает через четверть периода:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi L}{4}\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}},$$

$$\tau = \frac{3{,}14\cdot 10}{4}\sqrt{\frac{10}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}1}} \approx 2{,}05\cdot 10^6 \text{ с} \approx 24 \text{ суток}.$$



Смещение бусинки относительно середины стержня: $x = x_0\cos\omega t$; первый ноль — через $T/4$

Обратите внимание: ответ не зависит от начального смещения, но только пока оно мало ($x_0 \ll L$): при больших x сила растёт быстрее

линейной ($\propto x/((L/2)^2 - x^2)$), и колебания перестают быть гармоническими. Ещё одна ловушка — считать стержень неподвижным: тогда в ответе было бы M вместо $M + m$ (ошибка 5 %).

Проверка. Размерность: $[G(M+m)/L] = \text{Н}\cdot\text{м}/\text{кг} = \text{м}^2/\text{с}^2$, поэтому $L\sqrt{L/(G(M+m))}$ — в секундах. Предел $m \ll M$: стержень почти не движется, $\omega^2 = 8GM/L^3$ — колебания в поле неподвижного стержня. Смысл: гравитация ничтожно слаба, и даже на 10 метрах при килограммовых массах «падение» к середине длится три с лишним недели.

Ответ. $\tau = \dfrac{\pi L}{4}\sqrt{\dfrac{L}{2G(M+m)}} \approx 2{,}0 \cdot 10^6$ с $\approx$ 24 суток.