Толстая линза

Задача 5. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Толстая линза».

Вся поверхность плоского экрана, представляющего собой матовое стекло, освещается параллельным пучком лучей, направленным перпендикулярно экрану. Толстую линзу в виде половинки стеклянного шара расположили перед экраном так, что плоская поверхность линзы параллельна плоскости экрана (рис. 1). Показатель преломления стекла линзы $n = 2{,}0$. Диаметр линзы меньше размеров экрана.

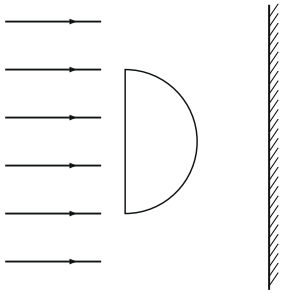


Рис. 1

1. Определите расстояние L_1 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 2). Здесь пунктирные линии касаются внешней границы области с переменной освещённостью.
2. Определите расстояние L_2 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 3).

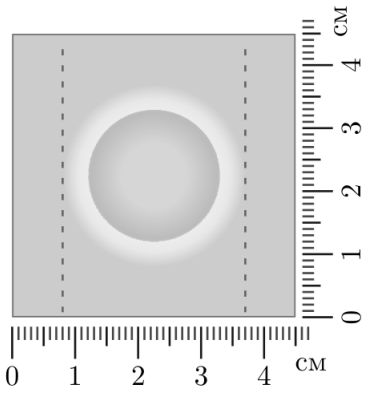


Рис. 2

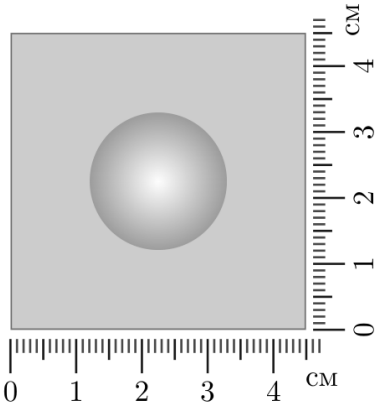


Рис. 3

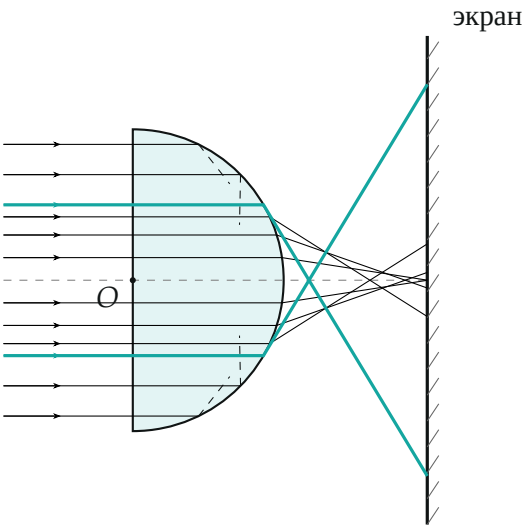
▲ **Решение. Что происходит.** Плоскую грань лучи проходят по нормали, не преломляясь. На сферической грани угол падения луча, идущего на высоте h от оси, равен α, где $\sin\alpha = h/R$ (нормаль к сфере — радиус). Лучи, падающие под углом больше предельного, испытывают полное внутреннее отражение. Вышедшие лучи преломляются к оси, пересекают её и расходятся по экрану. Главная идея: самый наклонный из вышедших лучей — предельный — задаёт внешнюю границу светлого кольца; диаметр тени равен диаметру линзы.

Обозначения. R — радиус линзы, O — центр её плоской грани; d — диаметр тёмного круга на экране, D — внешний диаметр области переменной освещённости; $\alpha_{\text{пр}}$ — предельный угол; L — расстояние от плоской грани до экрана.

1. Предельный угол. Закон преломления на сферической грани: $n\sin\alpha = \sin\beta$. Луч выходит, пока $\sin\beta \le 1$:

$$\sin\alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = 0{,}5, \qquad \alpha_{\text{пр}} = 30^\circ.$$

Выходят только лучи с $h \le R\sin 30^\circ = R/2$. Предельный луч выходит по касательной к сфере ($\beta = 90^\circ$), то есть отклоняется от оси на угол $\beta - \alpha = 60^\circ$ — больше любого другого вышедшего луча (у луча на высоте $h < R/2$ отклонение $\arcsin(2h/R) - \arcsin(h/R)$ меньше).

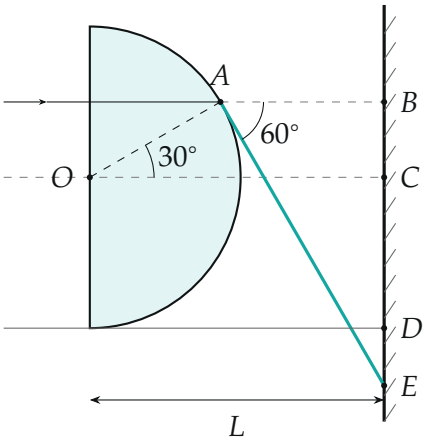


Ход лучей, рассчитанный по закону преломления при $n = 2$ для $L = L_1$. Бирюзой — предельные лучи ($h = \pm R/2$); лучи с $h > R/2$ (пунктир) отражаются внутрь линзы. Свет, прошедший мимо линзы, освещает экран вне круга диаметра $2R$

2. Что видно на экране. Тень линзы — круг диаметра $d = 2R$. Вышедшие лучи падают на экран *вне* тени, добавляясь к прямому свету,

— это светлое кольцо; его внешний край даёт предельный луч, пересёкший ось. По линейке рис. 2: $d = 2{,}10$ см, т. е. $R = 1{,}05$ см, и $D = 2{,}90$ см (между пунктирами).

Пункт 1. Расстояние L_1. Предельный луч выходит из точки A на сфере ($\angle AOC = 30°$), её координаты: $R\cos 30°$ вдоль оси и $R\sin 30° = R/2$ над осью. Луч идёт вниз под углом 60° к оси и попадает в точку E на расстоянии $D/2$ под осью.



Предельный луч: выходит из A по касательной под 60° к оси и приходит в E — внешний край кольца ($CE = D/2$); $CD = R$ — край тени

Из прямоугольного треугольника с катетами BE (по экрану) и AB (вдоль оси): $BE = AB\,\mathrm{tg}\,60°$, где $AB = L - R\cos 30°$, $BE = \dfrac{R}{2} + \dfrac{D}{2}$. Отсюда

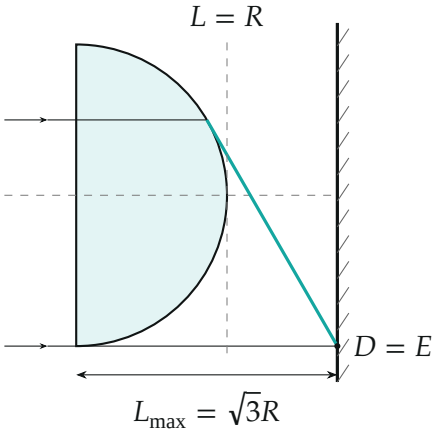
$$L_1 = R\cos 30° + \frac{R+D}{2\sqrt{3}} = \frac{D/4 + R}{\cos 30°} = \frac{0{,}725 + 1{,}05}{0{,}866} \approx 2{,}05 \text{ см}.$$

Пункт 2. Расстояние L_2. На рис. 3 светлого кольца вне тени нет. Значит, предельный луч приходит на экран внутри тени или на её край: $D \le d = 2R$. Граница $D = 2R$ (точки D и E совпали):

$$L_{\max} = R\cos 30° + \frac{3R}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}R \approx 1{,}82 \text{ см}.$$

При меньших L лучи тем более не выходят за тень. Ближе $L = R$ линзу не придвинуть: сфера касается экрана. Поэтому

$$R \le L_2 \le \sqrt{3}R, \qquad 1{,}05\text{ см} \le L_2 \le 1{,}82\text{ см}.$$



Граничное положение пункта 2: предельный луч приходит точно на край тени; при $L = R$ линза упирается в экран

Обратите внимание: светлое кольцо даёт не «фокус» линзы, а лучи после пересечения оси — поэтому внешний край кольца по другую сторону оси от точки выхода луча. И кольцо определяет предельный луч, а не самый крайний луч линзы: крайние лучи отражаются внутрь.

Проверка. Размерность — длина. При $D = 2R$ формула пункта 1 даёт ровно $\sqrt{3}R$ — согласовано с пунктом 2. Расчёт хода лучей на python (рисунок выше) при $L = 2{,}05$ см даёт внешний край кольца на 1,45 см от оси, т. е. $D = 2{,}90$ см.

Ответ. 1) $L_1 = \dfrac{D/4 + R}{\cos 30^\circ} \approx 2{,}05$ см ($R = 1{,}05$ см, $D = 2{,}90$ см по рисунку); 2) $R \le L_2 \le \sqrt{3}R$, то есть $1{,}05\text{ см} \le L_2 \le 1{,}82$ см.