Исследуем шприц (2)

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 1] «Исследуем шприц (2)».

Определите плотность неизвестной жидкости и среднюю плотность материала, из которого изготовлен шприц.

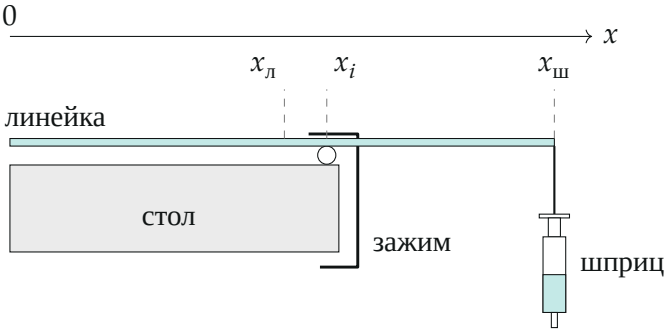
Приборы и оборудование: шприц (5 или 10 мл), нить (~ 1 м), деревянная линейка (50 см), большой стакан, заполненный водой, стаканчик с неизвестной жидкостью, канцелярский зажим, пластиковый стержень, заглушка для шприца (деревянная зубочистка (её можно ломать)), салфетки для поддержания порядка, поднос или одноразовая скатерть.

Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Примечание: во избежание выливания жидкости рекомендуется пользоваться заглушкой, вставляемой в шприц. Внимание! Портить шприц запрещается!

▲ **Решение. Что происходит.** Весов нет — взвешиваем рычагом. Линейка лежит на стержне, прижатом зажимом к краю стола, и служит одновременно рычагом и противовесом: её масса $m_л$ неизвестна, но приложена в её центре тяжести. Шприц на нити подвешен к концу линейки. Наливая в шприц известный объём воды, а потом столько же неизвестной жидкости, и каждый раз заново находя точку равновесия, по правилу моментов получаем массу шприца и плотность жидкости. Плотность материала шприца даёт закон Архимеда: подбираем такую порцию жидкости в шприце, чтобы он в воде плавал полностью погружённым в безразличном равновесии.

Обозначения. Координаты отсчитываем по шкале линейки (рис. ниже): $x_л$ — центр тяжести линейки, $x_ш$ — точка подвеса шприца, x_1, x_2, x_3 — точка опоры при равновесии с пустым шприцем, с водой объёма V и с неизвестной жидкостью объёма V; m — масса пустого шприца, ρ — плотность жидкости, $\rho_ш$ — средняя плотность материала шприца.



Установка: линейка опирается на стержень (кружок), прижатый зажимом к краю стола; шприц висит на нити на конце линейки

1. Центр тяжести линейки. Без шприца уравновешиваем линейку на стержне: центр тяжести — над точкой опоры. У организаторов $x_л = (252{,}0 \pm 0{,}5)$ мм.

2. Масса шприца. Подвешиваем пустой шприц в точке $x_ш$ и двигаем линейку по стержню до равновесия: опора в x_1. Правило моментов относительно точки опоры (силу реакции стержня оно исключает): момент силы тяжести шприца, приложенной через нить в $x_ш$, уравновешивает момент силы тяжести линейки, приложенной в $x_л$:

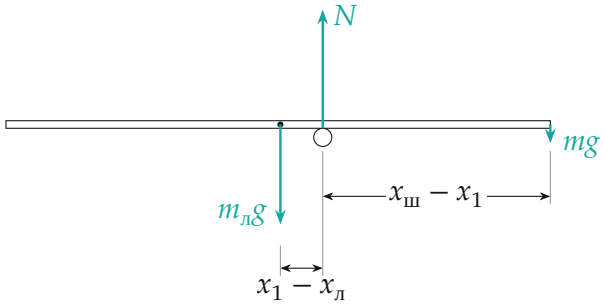
$$m\,(x_ш - x_1) = m_л\,(x_1 - x_л). \qquad (1)$$

Не сдвигая шприц, наливаем в него воду объёмом $V = 6{,}0$ мл (масса $\rho_в V$) и находим новую опору x_2:

$$(m + \rho_в V)(x_ш - x_2) = m_л\,(x_2 - x_л). \qquad (2)$$

Неизвестна и масса линейки — поделим (2) на (1), $m_л$ сократится, и выразим m:

$$m = \frac{\rho_в V\,(x_1 - x_л)(x_ш - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_ш - x_л)}. \qquad (3)$$



Силы на линейку с пустым шприцем (длины по модулю: $m_л \approx 22$ г, $m \approx 4{,}3$ г, $N = (m_л + m)g$)

3. Плотность жидкости. Выливаем воду, набираем тот же объём V неизвестной жидкости, опора — x_3:

$$(m + \rho V)(x_ш - x_3) = m_л\,(x_3 - x_л). \qquad (4)$$

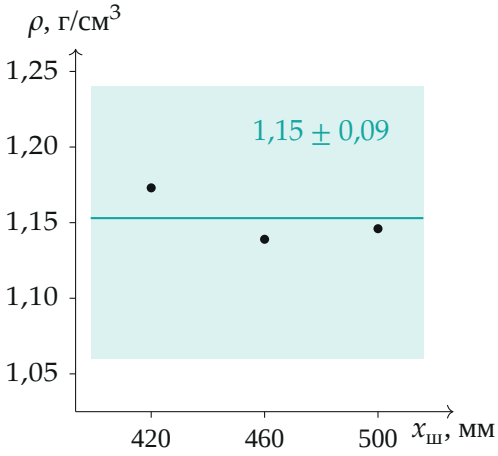
Из (1) и (4) так же, как в шаге 2, $m + \rho V = m_л \dfrac{x_3 - x_л}{x_ш - x_3}$, а из (1) и (2) $\rho_в V = m_л\Big(\dfrac{x_2 - x_л}{x_ш - x_2} - \dfrac{x_1 - x_л}{x_ш - x_1}\Big)$. Отношение после упрощения:

$$\rho = \rho_в \frac{(x_ш - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_ш - x_3)}. \qquad (5)$$

Масса и центр тяжести линейки в (5) не входят — нужны только четыре отсчёта по шкале.

4. Измерения. Чтобы оценить случайный разброс, опыт повторяют для трёх положений шприца (данные организаторов, мм; m и ρ — по (3) и (5), пересчитаны на python):

$x_ш$, мм	500,0	460,0	420,0
x_1, мм	291,0	286,0	279,0
x_2, мм	330,0	317,5	304,5
x_3, мм	334,5	321,0	308,0
m, г	4,11	4,44	4,37
ρ, г/см^3	1,146	1,139	1,173



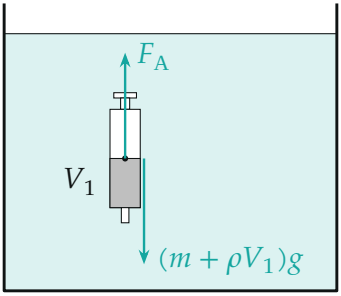
Плотность жидкости в трёх опытах; линия — среднее, полоса — погрешность $\pm 0{,}09$ г/см^3

5. Погрешность. Каждый отсчёт по шкале — $\pm 0{,}5$ мм, разность двух отсчётов — ± 1 мм. Самые короткие разности в (5) — $x_2 - x_1 \approx 25$ мм и $x_3 - x_1 \approx 29$ мм, отсюда приборная погрешность около $1/25 + 1/29 \approx 7\%$; разброс по трём опытам около 1,5%. Средние:

$$\rho = (1{,}15 \pm 0{,}09)\ \text{г/см}^3\ (\approx 7{,}7\%), \qquad m = (4{,}3 \pm 0{,}5)\ \text{г}\ (\approx 12\%).$$

У массы погрешность больше: в (3) три короткие разности ($x_1 - x_л \approx$ 27 мм тоже).

6. Плотность материала шприца. Шприц в воде плавает, и вытесненный им объём измерить нечем. Зато можно, наливая в шприц неизвестную жидкость и понемногу отливая её, добиться, чтобы шприц плавал целиком под водой в безразличном равновесии — не всплывал и не тонул. У организаторов это при объёме жидкости $V_1 = (3{,}0 \pm 0{,}2)$ мл. Шприц закрыт заглушкой, поэтому вытесняет он объём жидкости внутри V_1 плюс объём своего материала $m/\rho_ш$ (воздух из шприца выпущен).



Безразличное равновесие: шприц с жидкостью V_1 (серая) целиком под водой

Второй закон Ньютона для шприца с жидкостью, покоящегося под водой, по вертикали — сила Архимеда равна силе тяжести:

$$\rho_в g\Big(V_1+\frac{m}{\rho_ш}\Big)=(m+\rho V_1)g \quad\Longrightarrow\quad \rho_ш=\frac{\rho_в}{1+\dfrac{(\rho-\rho_в)V_1}{m}}.$$

Числа ($\rho-\rho_в=0{,}15$ г/см^3): $\rho_ш=\dfrac{1}{1+0{,}15\cdot 3{,}0/4{,}3}=0{,}905$ г/см^3. Метод границ: подставив самые неблагоприятные края ρ, V_1 и m, получаем 0,83 и 0,97 г/см^3, то есть $\rho_ш=(0{,}90\pm0{,}07)$ г/см^3 ($\approx 8\%$). Материал легче воды — это пластик (полипропилен, около 0,9 г/см^3), и правдоподобно: пустой шприц в воде плавает.

Обратите внимание. Гидростатическое взвешивание шприца на том же рычаге хуже: стакан невысок, и шприц, полностью под водой и не касаясь дна, вмещает лишь 4–4,5 мл; его вес в воде мал по сравнению с весом линейки, и точка опоры почти не сдвигается.

Проверка. Формула (5) безразмерна и даёт $\rho=\rho_в$, если $x_3=x_2$ (жидкость — та же вода). Масса линейки из (1), $m_л=m\frac{x_ш-x_1}{x_1-x_л}$, во всех трёх опытах одна и та же: 22,0; 22,7; 22,8 г — измерения согласованы.

Ответ. $\rho=(1{,}15\pm0{,}09)$ г/см^3; масса шприца $m=(4{,}3\pm0{,}5)$ г; средняя плотность материала шприца $\rho_ш=(0{,}90\pm0{,}07)$ г/см^3.