Что внутри? (серый ящик)

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 2] «Что внутри? (серый ящик)».

Внутри «серого» ящика находится идеальный источник с подключённым последовательно к нему резистором (рис. 1). Определите $I_{кз}$ — ток короткого замыкания серого ящика.

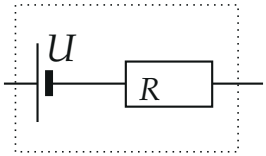


Рис. 1

Примечание. Коротким замыканием будем называть соединение между собой выводов серого ящика.

Приборы и оборудование: два одинаковых мультиметра, «серый» ящик с двумя выходами.

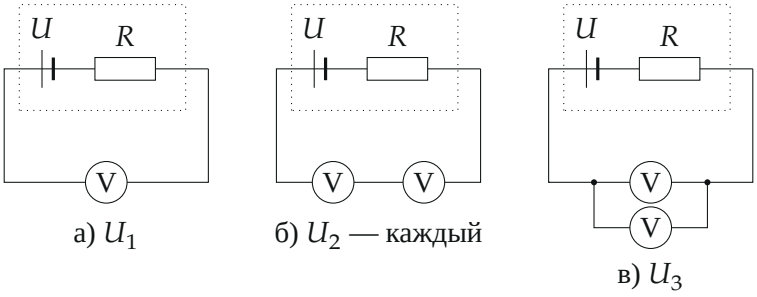
Примечание. Погрешность мультиметра считать равной 1% от значения измеряемой величины плюс 1 единица последнего разряда. Внимание! Использовать мультиметр в режиме амперметра строго запрещено! Такие решения засчитываться не будут.

▲ **Решение. Что происходит.** Ток короткого замыкания $I_{кз} = U/R$: при замкнутых выводах всё напряжение источника падает на внутреннем резисторе. Амперметром пользоваться нельзя, значит, надо по отдельности найти U и R. Это задача на закон Ома для полной цепи с неидеальным вольтметром: вольтметр — это резистор R_V, и если R сравнимо с R_V, показание меньше U. Меняя нагрузку (один вольтметр, два последовательно, два параллельно), получаем систему уравнений на U и R.

Обозначения. U — напряжение идеального источника, R — сопротивление резистора в ящике, R_V — сопротивление вольтметра (на пределе 20 В), U_1, U_2, U_3 — показания в трёх схемах.

1. Сопротивление вольтметра. Один мультиметр ставим вольтметром на предел 20 В, второй — омметром (мегаомы) и измеряем

им сопротивление первого между его гнёздами. У организаторов $R_V = (1{,}00 \pm 0{,}02)$ МОм. Это сравнимо с сопротивлением человеческого тела — при измерении нельзя касаться контактов пальцами.



а) U_1 б) U_2 — каждый в) U_3

Три схемы измерения: один вольтметр, два последовательно, два параллельно

2. Один вольтметр (схема а). Цепь замкнута через R и R_V, ток в ней $U/(R + R_V)$ (закон Ома для полной цепи с идеальным источником). Вольтметр показывает напряжение на себе:

$$U_1 = \frac{UR_V}{R + R_V}, \qquad U_1 = (3{,}94 \pm 0{,}05)\ \text{В}.$$

3. Два вольтметра последовательно (схема б). Нагрузка $2R_V$, ток $U/(R + 2R_V)$, вольтметры одинаковы и показывают одно и то же — напряжение на одном из них:

$$U_2 = \frac{UR_V}{R + 2R_V}, \qquad U_2 = (2{,}82 \pm 0{,}04)\ \text{В}.$$

Будь $R \ll R_V$, сумма показаний $2U_2$ совпала бы с U_1. А она 5,64 В $>$ 3,94 В: с большей нагрузкой на резисторе в ящике падает меньше. Значит, R сравнимо с R_V, и током вольтметра пренебречь нельзя.

4. Решение системы. Запишем оба уравнения как «U = ток × полное сопротивление»: ток через вольтметр в схеме а) U_1/R_V, в схеме б) U_2/R_V:

$$U = \frac{U_1}{R_V}(R + R_V), \qquad U = \frac{U_2}{R_V}(R + 2R_V).$$

Вычтем одно из другого, чтобы исключить U: $R(U_1 - U_2) = R_V(2U_2 - U_1)$, откуда

$$R = R_V \frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2} = 1{,}00 \cdot \frac{5{,}64 - 3{,}94}{3{,}94 - 2{,}82} = 1{,}52 \text{ МОм}.$$

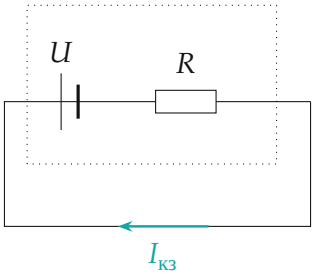
Тогда $R + R_V = R_V \dfrac{U_2}{U_1 - U_2}$, и из первого уравнения

$$U = \frac{U_1 U_2}{U_1 - U_2} = \frac{3{,}94 \cdot 2{,}82}{1{,}12} = 9{,}92 \text{ В}.$$

5. Ток короткого замыкания. Выводы замкнуты — во внешней цепи сопротивления нет, закон Ома для полной цепи: $I_{кз} = U/R$. Через измеренные величины:

$$I_{кз} = \frac{U}{R} = \frac{U_1 U_2}{R_V(2U_2 - U_1)} = \frac{3{,}94 \cdot 2{,}82}{1{,}00 \cdot 1{,}70} \text{ мкА} = 6{,}5 \text{ мкА}$$

(вольт на мегаом — микроампер).

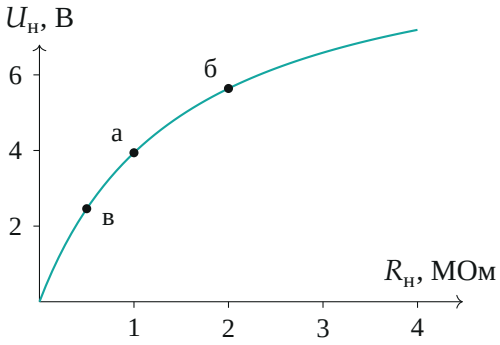


Короткое замыкание (мысленный опыт: амперметр запрещён): ток ограничивает только R

6. Проверка третьей схемой (в). Два вольтметра параллельно — нагрузка $R_V/2$, показание

$$U_3 = \frac{U \cdot R_V/2}{R + R_V/2} = \frac{9{,}92 \cdot 0{,}5}{1{,}52 + 0{,}5} = 2{,}46 \text{ В},$$

а измерено $U_3 = (2{,}46 \pm 0{,}04)$ В — совпадает. Модель «идеальный источник + резистор» подтверждена тремя точками.



Напряжение на нагрузке $U_н = UR_н/(R + R_н)$ при найденных U и R; точки — три опыта (в схеме б — сумма $2U_2$ на $2R_V$)

7. Погрешность. У организаторов погрешности сложены как относительные: $U = (9{,}9 \pm 0{,}8)$ В, $R = (1{,}5 \pm 0{,}2)$ МОм, $I_{кз} = (6{,}5 \pm 1{,}4)$ мкА. Это оценка сверху: в U и R сидит одна и та же разность $U_1 - U_2$, и в $I_{кз}$ она сокращается. Метод границ по последней формуле шага 5 (python) даёт 5,96 … 7,21 мкА, то есть около $\pm 0{,}6$ мкА; самая чувствительная величина — разность $2U_2 - U_1 = 1{,}70$ В.

Обратите внимание. Пальцы на контактах при измерении R_V омметром шунтируют прибор: сопротивление тела порядка 1 МОм, и R_V выйдет заниженным вдвое.

Проверка. Размерность: В · В/(МОм · В) = мкА. Предел: если $R \ll R_V$, то $2U_2 \to U_1$, $2U_2 - U_1 \to 0$, и $I_{кз} \to \infty$ — ящик с малым внутренним сопротивлением, как и должно быть.

Ответ. $I_{кз} = \dfrac{U}{R} = \dfrac{U_1 U_2}{R_V(2U_2 - U_1)} = (6{,}5 \pm 1{,}4)$ мкА (при $U = (9{,}9 \pm 0{,}8)$ В, $R = (1{,}5 \pm 0{,}2)$ МОм).