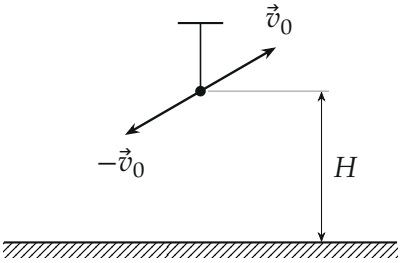
Два осколка

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Два осколка».

Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями v_0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются.



Поясняющий рисунок: петарда на нити на высоте H; осколки разлетаются вдоль одной прямой со скоростями $\pm\vec{v}_0$

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику тела, брошенного под углом к горизонту, с поиском максимума. Направление разлёта не задано — его надо выбрать наилучшим. Если разлёт горизонтальный, оба осколка летят одинаковое время; если наклонный, один летит вверх и дольше, другой вниз и быстрее падает, а горизонтальная скорость меньше. Ключевое наблюдение: траектории двух осколков — две части *одной* параболы. Тогда задача сводится к дальности броска с земли, а она известна: максимальна под 45°. Но точка взрыва должна лежать на этой параболе на высоте H — отсюда два режима ответа.

Обозначения. φ — угол скорости первого осколка с горизонтом ($0 \le \varphi < 90°$, первый летит вверх-вперёд, второй — вниз-назад); $v_x = v_0\cos\varphi$, $v_y = v_0\sin\varphi$; t_1, t_2 — время полёта осколков; ось x — горизонтально по движению первого, y — вверх от земли.

1. Время полёта. Ускорение обоих осколков $\vec{g}$ (сопротивления воздуха нет), равноускоренное движение по вертикали. Первый: $y = H + v_y t -$

$\frac{gt^2}{2}$; второй: $y = H - v_y t - \frac{gt^2}{2}$. Падение — $y = 0$, берём положительный корень:

$$t_1 = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gH}}{g}, \qquad t_2 = \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gH}}{g}.$$

2. Расстояние между осколками. По горизонтали оба движутся равномерно с v_x в разные стороны:

$$L = v_x(t_1 + t_2) = \frac{2v_x}{g}\sqrt{v_y^2 + 2gH} = \frac{2}{g}\sqrt{(v_0^2 - v_y^2)(v_y^2 + 2gH)}. \qquad (1)$$

Растёт v_y — растёт время полёта, но падает v_x; есть оптимум.

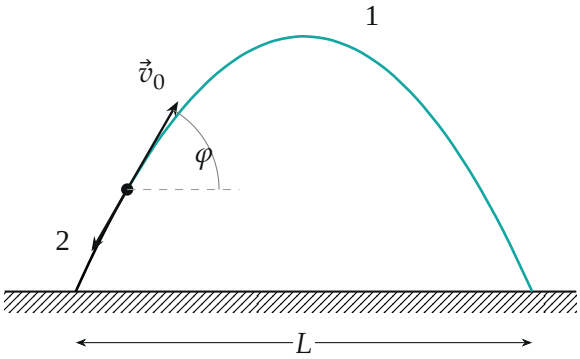


Рис. 1. Полёт осколков, рассчитанный для $v_0^2 = 4gH$, $\varphi = 60°$: $L = 4{,}47H$; оба куска траектории — одна парабола

3. Наибольшее L. Подкоренное выражение в (1) — произведение двух множителей с постоянной суммой: $(v_0^2 - v_y^2) + (v_y^2 + 2gH) = v_0^2 + 2gH$. Произведение при постоянной сумме наибольшее, когда множители равны (неравенство о средних):

$$v_0^2 - v_y^2 = v_y^2 + 2gH \quad \Longrightarrow \quad v_y^2 = \frac{v_0^2 - 2gH}{2}.$$

Это возможно, только если $v_0^2 \geq 2gH$. Тогда

$$L_{\max} = \frac{2}{g} \cdot \frac{v_0^2 + 2gH}{2} = \frac{v_0^2}{g} + 2H.$$

Если $v_0^2 < 2gH$, равенства не достичь: при любом v_y первый множитель меньше второго, и произведение растёт, когда v_y^2 уменьшается. Наибольшее — при $v_y = 0$, разлёт горизонтальный:

$$L_{\max} = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 \cdot 2gH} = 2v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

На границе $v_0^2 = 2gH$ обе формулы дают $4H$ — ответ непрерывен. Зависимость $L(\varphi)$ для двух режимов — рис. 3.

4. Второй способ: одна парабола. Обратим время в движении второго осколка: из точки взрыва он «летел бы» со скоростью $+\vec{v}_0$ — то есть вдоль траектории первого осколка, только назад. Значит, траектория второго осколка — продолжение параболы первого в прошлое (на рис. 1 это видно: обе части гладко стыкуются). Обе точки падения лежат на одной параболе на уровне земли, а L — её «дальность». По закону сохранения энергии скорость на уровне земли у обоих одинакова:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgH \quad \Longrightarrow \quad u^2 = v_0^2 + 2gH.$$

Дальность броска с земли со скоростью u наибольшая при 45° и равна $u^2/g = v_0^2/g + 2H$ — то же, что в п. 3 (рис. 2). Такая парабола поднимается на $u^2/(4g)$; точка взрыва на высоте H лежит на ней, только если $u^2/(4g) \geq H$, то есть $v_0^2 \geq 2gH$ — тот же признак режима.

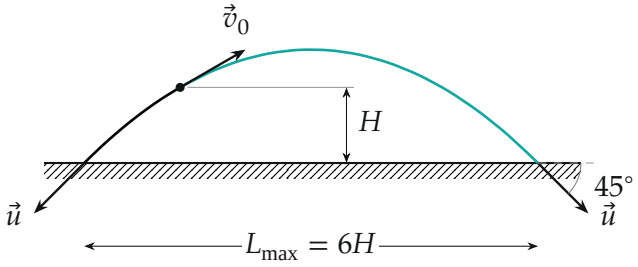


Рис. 2. Наилучший разлёт при $v_0^2 = 4gH$ (расчёт): $\varphi = 30°$, осколки падают под 45° со скоростью $u = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$, $L_{\max} = v_0^2/g + 2H = 6H$

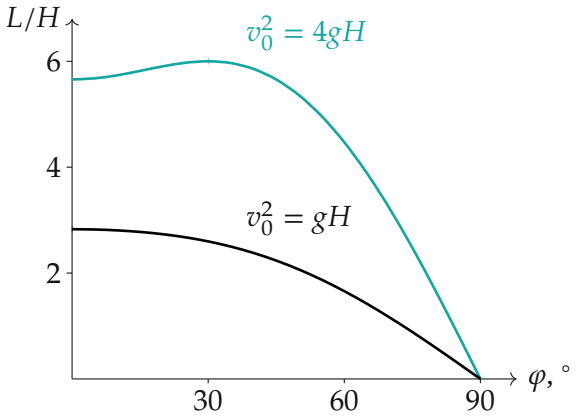


Рис. 3. $L(\varphi)$ по формуле (1): при $v_0^2 > 2gH$ максимум при наклонном разлёте ($\varphi = 30°$, $6H$), при $v_0^2 < 2gH$ — при горизонтальном ($2\sqrt{2}\,H$)

Обратите внимание. Ответ «бросать под 45°» здесь неверен дважды: под 45° к горизонту падают осколки, а не вылетают; и при малой скорости ($v_0^2 < 2gH$) лучше разлёт горизонтальный.

Соберём ответ.

$$L_{\max} = \begin{cases} \dfrac{v_0^2}{g} + 2H, & v_0^2 \geq 2gH, \\ 2v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}, & v_0^2 < 2gH. \end{cases}$$

Проверка. Размерность: v_0^2/g и $v_0\sqrt{H/g}$ — метры. Предел $H \to 0$: взрыв у земли, $L_{\max} = v_0^2/g$ — максимальная дальность броска с земли (первый осколок под 45°, второй сразу в землю) — верно. Предел $v_0 \to 0$: $L \to 0$. Второй способ (п. 4) дал тот же ответ и тот же признак режима.

Смысл: два осколка рисуют одну параболу, и задача о взрыве превращается в задачу о броске с земли со скоростью $\sqrt{v_0^2 + 2gH}$.

Ответ. $L_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g} + 2H$ при $v_0^2 \geq 2gH$ (разлёт под углом φ к горизонту, $\sin^2\varphi = \dfrac{v_0^2 - 2gH}{2v_0^2}$); $L_{\max} = 2v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ при $v_0^2 < 2gH$ (разлёт горизонтальный).