Шарик на нитях

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Шарик на нитях».

Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 25{,}0$ см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис. 1), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$. Найдите значения угловой скорости ω, при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

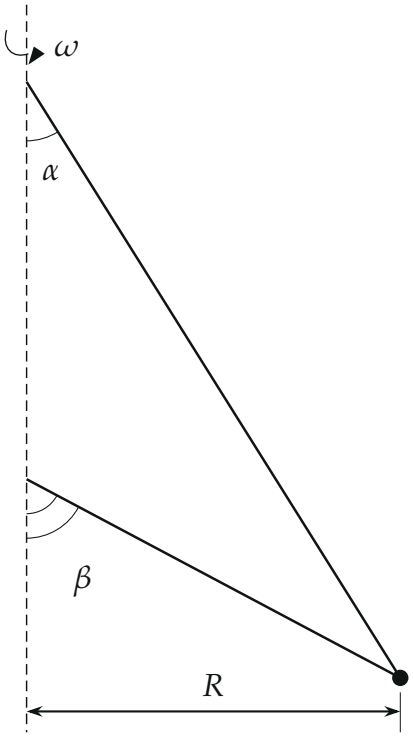

Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику движения по окружности. Шарик движется равномерно по горизонтальной окружности, его ускорение $\omega^2 R$ направлено к оси. Это ускорение создают горизонтальные составляющие натяжений двух нитей, а их вертикальные

составляющие держат шарик против тяжести. Чем быстрее вращение, тем больше нужна горизонтальная сила — и тем сильнее нагружается пологая (нижняя) нить, а крутая (верхняя) разгружается. Поэтому отношение натяжений меняется с ω монотонно, и «в 2 раза» получится при двух скоростях: когда вдвое сильнее натянута верхняя нить и когда нижняя.

Обозначения. T_1 — натяжение верхней нити (угол α с осью), T_2 — нижней (угол β); ось x — горизонтально к оси вращения, ось y — вертикально вверх.

1. Второй закон Ньютона для шарика. На шарик действуют тяжесть $m\vec{g}$ и натяжения $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ вдоль нитей (рис. 2); ускорение $\omega^2 R$ направлено к оси:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2.$$

Ось x выбираем по ускорению, y — по тяжести: тогда в каждой проекции одно известное. Проекции:

$$x:\ T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 R, \qquad y:\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = mg.$$

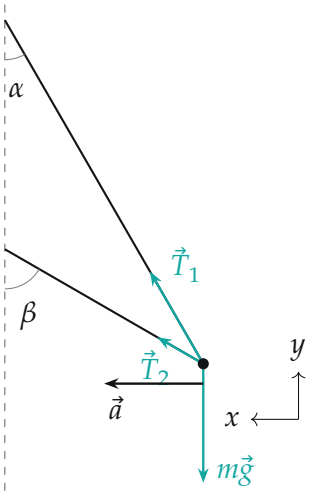

Рис. 2. Силы на шарик (длины — для ω_1, когда $T_1 = 2T_2$: $T_1 = 0{,}90\,mg$, $T_2 = 0{,}45\,mg$)

2. Обе нити натянуты? Нить может только тянуть, $T_{1,2} > 0$. Решая систему, при $T_2 = 0$ получаем $\omega^2 = \dfrac{g}{R}\operatorname{tg}\alpha$, при $T_1 = 0$ — $\omega^2 = \dfrac{g}{R}\operatorname{tg}\beta$. Обе нити натянуты в промежутке

$$\sqrt{\frac{g}{R}\operatorname{tg}\alpha} = 4{,}76\ \text{с}^{-1} < \omega < \sqrt{\frac{g}{R}\operatorname{tg}\beta} = 8{,}24\ \text{с}^{-1}.$$

Внутри него T_1 падает, а T_2 растёт (рис. 4), так что каждое из отношений $T_1/T_2 = 2$ и $T_2/T_1 = 2$ встречается ровно один раз.

3. Случай А: верхняя нить натянута вдвое сильнее, $T_1 = 2T$, $T_2 = T$. Система п. 1:

$$m\omega^2 R = T(2\sin\alpha + \sin\beta), \qquad mg = T(2\cos\alpha + \cos\beta).$$

Делим первое на второе — T и m сокращаются:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R}\cdot\frac{2\sin\alpha+\sin\beta}{2\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{g}{R}\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+\frac{1}{2}} = \frac{g}{R}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1} = 0{,}836\,\frac{g}{R},$$

$$\omega_1 = 0{,}914\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}25}}\ \text{с}^{-1} = 5{,}73\ \text{с}^{-1}.$$

Многоугольник сил для этого случая (рис. 3) замыкается на $m\vec{a}$: сумма трёх сил направлена горизонтально к оси.

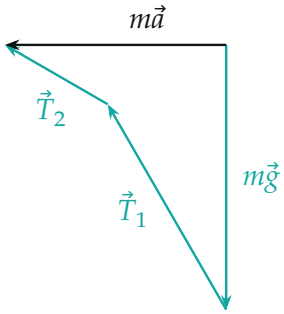

Рис. 3. Сложение сил в случае А: $m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$, $ma = 0{,}84\,mg$

4. Случай Б: нижняя нить натянута вдвое сильнее, $T_1 = T$, $T_2 = 2T$:

$$\omega_2^2 = \frac{g}{R}\cdot\frac{\sin\alpha + 2\sin\beta}{\cos\alpha + 2\cos\beta} = \frac{g}{R}\cdot\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} = \frac{g}{R}\cdot\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 1{,}196\,\frac{g}{R},$$

$$\omega_2 = 1{,}094\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}25}}\ \text{с}^{-1} = 6{,}85\ \text{с}^{-1}.$$

Оба значения лежат в промежутке п. 2 — обе нити натянуты.

5. Второй способ проверки. Заметим, что $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 1$, то есть $\omega_1\omega_2 = g/R$: $5{,}73\cdot 6{,}85 = 39{,}2 = 9{,}81/0{,}25$ — верно. Это следствие того, что $\alpha+\beta = 90°$: синусы и косинусы двух углов меняются местами. Натяжения как функции ω построены на рис. 4 по формулам п. 1; точки, где одна линия вдвое выше другой, — наши ω_1 и ω_2.

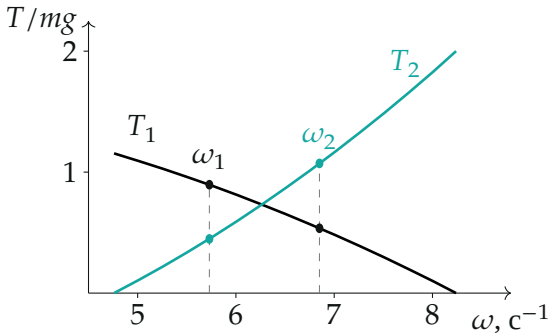

Рис. 4. Натяжения нитей в зависимости от ω (чёрная — верхняя, бирюзовая — нижняя); в ω_1 верхняя вдвое больше нижней, в ω_2 — наоборот

Обратите внимание. «Отличаются в 2 раза» — два случая, и оба надо рассмотреть. И каждый раз проверить, что обе нити натянуты (п. 2).

Соберём ответ.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{2\sin\alpha+\sin\beta}{2\cos\alpha+\cos\beta}} \approx 5{,}7\ \text{с}^{-1},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{\sin\alpha + 2\sin\beta}{\cos\alpha + 2\cos\beta}} \approx 6{,}85\ \text{с}^{-1}.$$

У организаторов $\omega_2 \approx 6{,}8\ \text{с}^{-1}$ — то же значение, округлённое вниз.

Проверка. Размерность: $\sqrt{g/R}$ — с^{-1}. Предел: при равных натяжениях ответ был бы между ω_1 и ω_2: $\omega^2 = \frac{g}{R}\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{g}{R}$ — середина в геометрическом смысле, $\sqrt{\omega_1\omega_2}$; так и получилось. Вторая проверка — произведение $\omega_1\omega_2 = g/R$ (п. 5).

Смысл: медленнее вращение — больше работает крутая нить (держит вес), быстрее — пологая (создаёт центростремительную силу).

Ответ. $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{2\sin\alpha + \sin\beta}{2\cos\alpha + \cos\beta}} \approx 5{,}7\ \text{с}^{-1}$ (верхняя нить натянута вдвое сильнее); $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{\sin\alpha + 2\sin\beta}{\cos\alpha + 2\cos\beta}} \approx 6{,}85\ \text{с}^{-1}$ (нижняя нить натянута вдвое сильнее).