Два шарика на нитях

Задача 3. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Два шарика на нитях».

Лёгкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погружённый в жидкость поплавок объёмом $V = 10$ см^3 и плотностью $\rho = 500$ кг/м^3. Над другой опорой висит привязанный снаружи шарик такого же объёма V и плотностью 3ρ (рис. 1). Плотность жидкости в сосуде равна $\rho_0 = 1200$ кг/м^3. Найдите модуль разности сил реакции опор. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

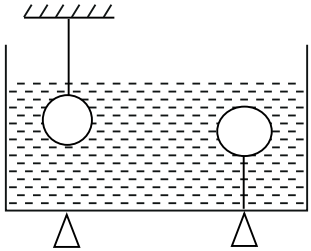
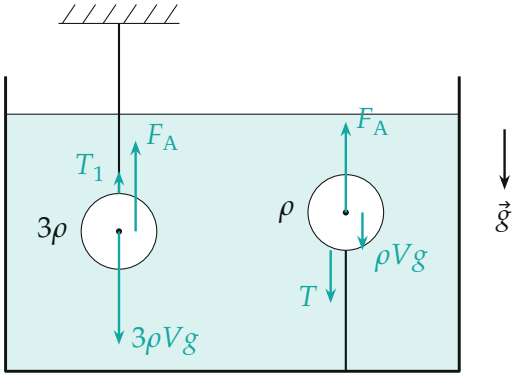


Рис. 1

▲ **Решение. Что происходит.** Сосуд лёгкий, поэтому сила, с которой опоры его держат, — это сила, с которой на дно давят жидкость и нить поплавка. Задача на гидростатику (давление на дно, закон Архимеда) и правило моментов для сосуда. Ловушка в том, что тяжёлый шарик снаружи и поплавок внутри действуют на дно по-разному: шарик только поднимает уровень жидкости, а поплавок ещё и тянет дно нитью вверх в одной точке.

Обозначения. m — масса жидкости, S — площадь дна, H — высота уровня жидкости; T_1 — натяжение нити шарика, T — нити поплавка; F — сила давления жидкости на дно; N_1 — сила реакции левой опоры (под шариком), N_2 — правой (под поплавком); $2l$ — расстояние между опорами; C — середина дна.



Силы на шарик и на поплавок; $F_A = \rho_0 Vg$ у обоих (оба погружены целиком); длины стрелок — по модулю

1. Нить поплавка. Второй закон Ньютона для покоящегося поплавка в проекции на вертикаль: вверх — сила Архимеда $\rho_0 Vg$, вниз — сила тяжести ρVg и натяжение нити T:

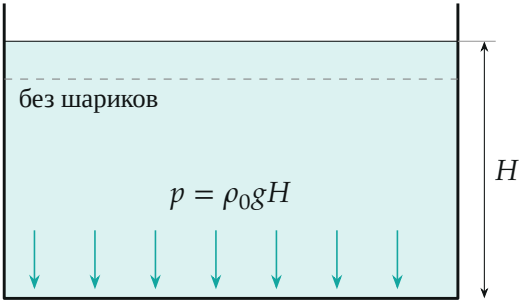
$$\rho_0 Vg - \rho Vg - T = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = (\rho_0 - \rho)Vg.$$

Плотность поплавка меньше плотности жидкости, поэтому $T > 0$: нить натянута, и по третьему закону Ньютона она тянет дно сосуда вверх в точке над правой опорой.

2. Давление на дно. Жидкость покоится, дно плоское, поэтому давление у дна одинаково по всей площади: $p = p_{\text{атм}} + \rho_0 gH$. Атмосфера давит на сосуд и снизу, так что вклад дают только $\rho_0 gH$. Уровень H задаёт всё, что погружено в жидкость: сама жидкость, поплавок и шарик:

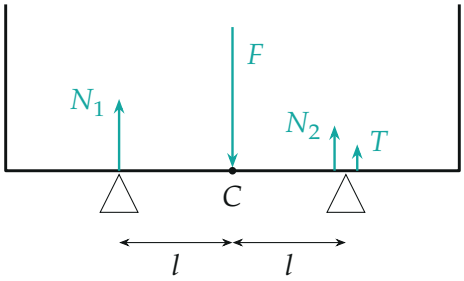
$$HS = \frac{m}{\rho_0} + V + V \quad \Longrightarrow \quad F = \rho_0 gHS = mg + 2\rho_0 Vg.$$

Шарик висит на своей нити и дна не касается, но по третьему закону Ньютона он давит на жидкость вниз силой $\rho_0 Vg$ (ответ на силу Архимеда), и это давление через подъём уровня передаётся на всё дно равномерно. Поэтому сила F приложена в середине дна C, а не над какой-то опорой.



Давление у дна одинаково везде: оба тела поднимают уровень на $2V/S$ (пунктир — уровень одной жидкости)

3. Силы на сосуд. Сосуд лёгкий, его массой пренебрегаем. На него действуют: сила давления жидкости F вниз в точке C, нить поплавка T вверх над правой опорой, силы реакции N_1 и N_2 вверх. Давление жидкости на боковые стенки слева и справа одинаково и уравновешивается.



Силы на лёгкий сосуд; длины стрелок — по модулю, $F = N_1 + N_2 + T$

4. Правило моментов. Сосуд покоится — сумма моментов сил относительно точки C равна нулю. Сила F проходит через C и момента не даёт. Против часовой стрелки поворачивают N_2 и T (плечо l), по часовой — N_1 (плечо l):

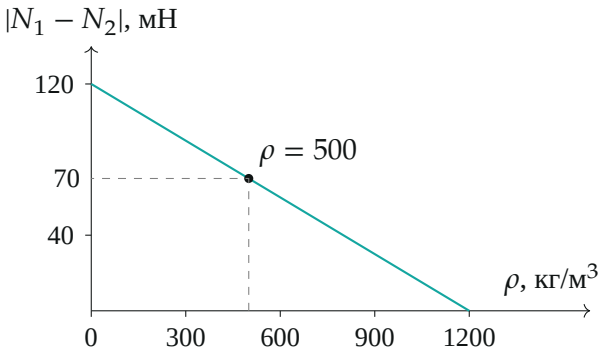
$$N_2 l + Tl - N_1 l = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 - N_2 = T = (\rho_0 - \rho)Vg.$$

Знак: $N_1 > N_2$, сильнее нагружена опора под тяжёлым шариком — нить поплавка разгружает правую опору.

5. Второй способ — сумма сил по каждой опоре. Второй закон Ньютона для сосуда по вертикали: $N_1 + N_2 + T = F$. Вместе с шагом 4:

$$N_1 = \frac{F}{2} = \frac{mg}{2} + \rho_0 Vg, \qquad N_2 = \frac{F}{2} - T = \frac{mg}{2} + \rho Vg.$$

Удобно прочитать так: слева опора несёт половину жидкости и ещё «вес» вытесненной шариком жидкости $\rho_0 Vg$, справа — половину жидкости и настоящий вес поплавка ρVg. Разность та же: $(\rho_0 - \rho)Vg$.



Разность реакций как функция плотности поплавка: прямая $(\rho_0 - \rho)Vg$, обращается в ноль при $\rho = \rho_0$

Обратите внимание. Плотность шарика 3ρ в ответ не входит: сколько бы ни весил шарик, его вес несёт внешняя нить, а на сосуд он действует только через силу Архимеда $\rho_0 Vg$. И эта сила давит на дно не под шариком, а равномерно по всему дну.

Числа: $(\rho_0 - \rho)Vg = (1200 - 500) \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 7 \cdot 10^{-2}$ Н.

$$|N_1 - N_2| = (\rho_0 - \rho)Vg = 70 \text{ мН}.$$

Проверка. Размерность: кг/м$^3 \cdot$ м$^3 \cdot$ м/с^2 = Н. Предел: поплавок плотности жидкости ($\rho = \rho_0$) нить не натягивает, и опоры нагружены одинаково — формула даёт ноль.

Ответ. $|N_1 - N_2| = (\rho_0 - \rho)Vg = 70$ мН; сильнее нагружена опора под висящим шариком.