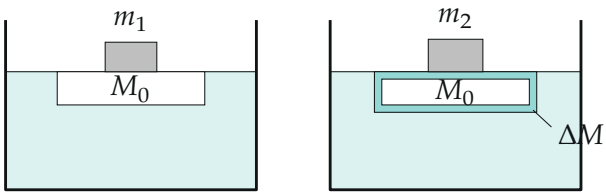
# Архимед и температура

**Задача 4.** [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Архимед и температура».

Плоская льдинка плавает в сосуде с водой, имеющей температуру $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. Минимальная масса груза, который необходимо положить на льдинку, чтобы она полностью погрузилась в воду, равна $m_1 = 100$ г. Если эту льдинку охладить до температуры $t_1$ и снова положить в тот же сосуд с водой, по-прежнему имеющей температуру $t_0$, то после установления теплового равновесия для полного погружения льдинки в воду на неё необходимо будет положить груз минимальной массы $m_2 = 110$ г. Определите температуру $t_1$.

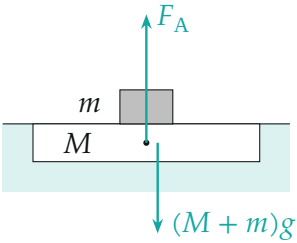
Удельная теплоёмкость льда $c = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.




*Поясняющий рисунок: льдинка с минимальным грузом погружена целиком; после охлаждения на ней намёрз слой $\Delta M$*

▲ **Решение. Что происходит.** Холодная льдинка в воде при 0 °C отбирает у воды тепло, и вода намерзает на ней, пока льдинка не нагреется до 0 °C. Льдинка становится тяжелее и больше, и для её полного погружения нужен груз больше. Задача на условие плавания (закон Архимеда) и уравнение теплового баланса; прирост груза $m_2 - m_1$ «взвешивает» намёрзший лёд.

**Обозначения.** $M_0$ — масса льдинки до охлаждения, $\Delta M$ — масса намёрзшего льда, $M_1 = M_0 + \Delta M$; $\rho_в$, $\rho_л$ — плотности воды и льда (их значения не понадобятся).




*Силы на систему «льдинка + груз» при минимальном грузе*

**1. Условие плавания с минимальным грузом.** Груз минимален, когда льдинка погружена ровно целиком, но груз ещё над водой. Второй закон Ньютона для покоящейся системы «льдинка $M$ + груз $m$» по вертикали: сила Архимеда, действующая на весь объём льда $M/\rho_л$, уравновешивает силу тяжести:

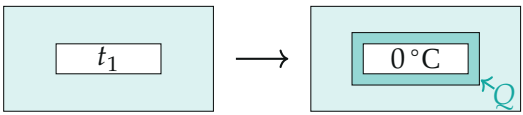
$$\rho_в g\frac{M}{\rho_л} = (M+m)g \quad\Longrightarrow\quad m = M\Big(\frac{\rho_в}{\rho_л}-1\Big) = kM, \qquad k = \frac{\rho_в}{\rho_л}-1.$$

Минимальный груз пропорционален массе льдинки с одним и тем же коэффициентом $k$.

**2. Масса намёрзшего льда.** Применим шаг 1 до и после охлаждения: $m_1 = kM_0$, $m_2 = k(M_0+\Delta M)$. Вычтем:

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \frac{m_2-m_1}{m_1} = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Масса льдинки выросла на 10%.

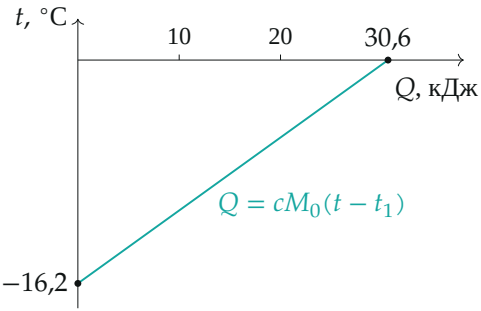



*Вода при 0 °C отдаёт льдинке тепло $Q$ и намерзает на неё слоем (бирюзовый)*

**3. Тепловой баланс.** Вода всё время при 0 °C и остаётся ею, пока не замёрзнет, поэтому тепло льдинке даёт только кристаллизация. Уравнение теплового баланса (теплообмен льдинки с водой, потерь нет): тепло, выделившееся при замерзании воды массой $\Delta M$, нагревает льдинку массы $M_0$ от $t_1$ до $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$:

$$cM_0(t_0 - t_1) = \lambda\,\Delta M.$$

Намёрзший лёд образуется сразу при 0 °C и сам не нагревается.




*Температура льдинки ($M_0 = 0{,}9$ кг при $\rho_л = 900$ кг/м$^3$) в зависимости от полученного тепла: до 0 °C нужно $\lambda\Delta M = 30{,}6$ кДж*

**4. Ответ.** Из шага 3 с $\Delta M/M_0$ из шага 2:

$$t_1 = t_0 - \frac{\lambda}{c}\cdot\frac{\Delta M}{M_0} = -\frac{\lambda(m_2 - m_1)}{c\,m_1} = -\frac{340\cdot 10^3\cdot 0{,}1}{2100} \approx -16{,}2\,^\circ\text{C}.$$

Знак минус: льдинку охладили ниже нуля, как и должно быть, раз вода на ней намёрзла.

**Обратите внимание.** Плотности воды и льда в условии не даны и не нужны: коэффициент $k$ один и тот же до и после охлаждения и сокращается. Для чисел на графике взято $\rho_л = 900$ кг/м$^3$: $M_0 = m_1/k = 0{,}9$ кг, $\Delta M = 90$ г — на ответ это не влияет.

**Проверка.** Размерность: $[\lambda/c] = (\text{Дж/кг})/(\text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C})) = {}^\circ\text{C}$. Предел: $m_2 = m_1$ — ничего не намёрзло, значит, льдинку не охлаждали, и формула даёт $t_1 = 0$. Чем холоднее льдинка, тем больше на ней намерзает, и $m_2 - m_1$ растёт линейно с $|t_1|$.

**Ответ.** $t_1 = -\dfrac{\lambda(m_2 - m_1)}{c\,m_1} \approx -16{,}2\,^\circ\mathrm{C}.$