Кольца Ауди

Задача 5. [ВсОШ 2016/17, региональный этап, 9 класс, задача 5] «Кольца Ауди».

N одинаковых колец соединены так, что между всеми точками их пересечения обеспечен электрический контакт (места контактов отмечены жирными точками). Центры всех колец лежат на одной прямой (рис. 3). Какое сопротивление $R_Э$ покажет омметр, подключённый к точкам A и B этой цепи, если при подключении к диаметрально противоположным точкам уединённого кольца он показывает сопротивление R_0? Считать $N > 3$.

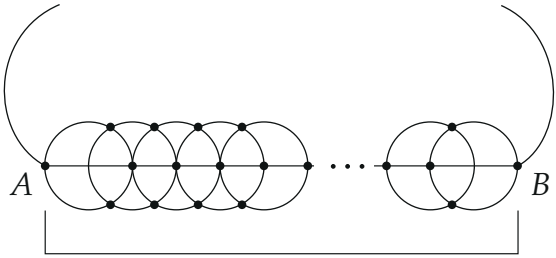


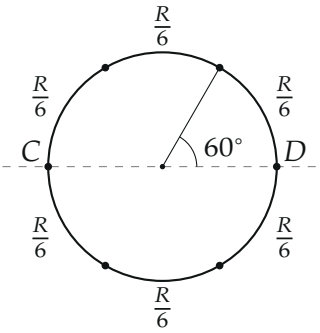
Рис. 3

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт сопротивления симметричной цепи. Цепь зеркально симметрична относительно прямой AB, поэтому токи в верхней и нижней половинах одинаковы, и узлы на прямой AB можно разрезать: цепь распадается на две одинаковые половины, включённые параллельно. Каждая половина — простая последовательно-параллельная цепочка из дуг колец.

Обозначения. R — сопротивление целого кольца (провода по всей окружности); $P_1, \dots, P_{N-1}$ — верхние точки пересечения соседних колец; $O_1, \dots, O_{N-2}$ — точки контакта на прямой AB между ними.

1. Сопротивление кольца и его дуг. Центр каждого кольца лежит на соседних кольцах (рис. 3: точки на прямой AB — это центры колец), значит, расстояние между центрами равно радиусу r. Две окружности радиуса r с центрами на расстоянии r пересекаются в точках, видных из

центра под углом 60° к прямой центров. Поэтому узлы делят кольцо на дуги по 60° (сопротивление $R/6$) и, у крайних колец, по 120° ($R/3$).



Узлы делят кольцо на шесть дуг по 60°, у каждой сопротивление $R/6$

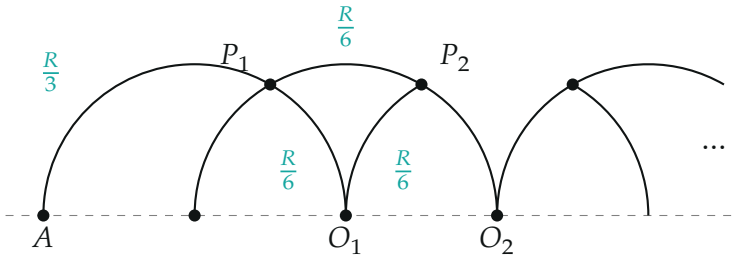
Сопротивление провода пропорционально длине. Уединённое кольцо между диаметрально противоположными точками C и D — две полуокружности по $R/2$, включённые параллельно:

$$R_0 = \frac{(R/2)(R/2)}{R/2 + R/2} = \frac{R}{4} \quad \Longrightarrow \quad R = 4R_0.$$

2. Разрез по оси симметрии. При отражении относительно прямой AB цепь и точки подключения переходят сами в себя, поэтому ток в каждой верхней дуге равен току в зеркальной нижней. В узле на прямой AB токи верхних дуг сами по себе дают в сумме ноль (первое правило Кирхгофа для верхней половины), и узел можно разрезать на верхний и нижний, ничего не изменив. Цепь — две одинаковые половины, соединённые параллельно между A и B:

$$R_\text{Э} = \frac{R_\text{п}}{2},$$

где $R_\text{п}$ — сопротивление верхней половины.



Левый край верхней половины после разреза. Дуга от P_1 к центру первого кольца (и такая же у правого края) — тупик, тока в ней нет

3. Верхняя половина. Идём от A вправо (рисунок выше):

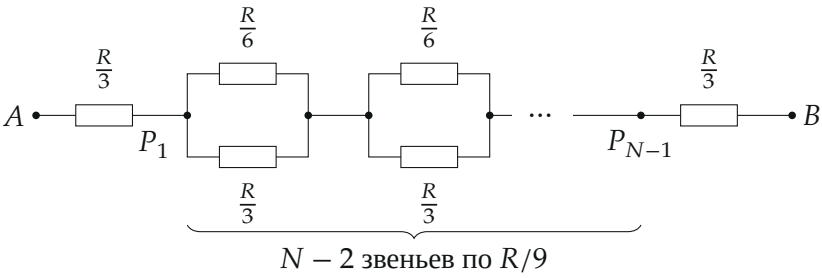
- от A до P_1 — дуга первого кольца в 120°: $R/3$;
- от P_j до P_{j+1} — два пути: прямо по дуге 60° кольца ($R/6$) или через точку O_j по двум дугам ($R/6 + R/6 = R/3$). Параллельное соединение:

$$R_{\text{зв}} = \frac{\frac{R}{6}\cdot\frac{R}{3}}{\frac{R}{6}+\frac{R}{3}} = \frac{R}{9};$$

- таких звеньев между P_1 и P_{N-1} ровно $N-2$;
- от P_{N-1} до B — снова дуга 120°: $R/3$.

Обратите внимание: дуга второго кольца от P_1 к центру первого кольца после разреза никуда больше не ведёт — ток в ней равен нулю; так же у правого края. Последовательное соединение:

$$R_{\text{п}} = \frac{R}{3} + (N-2)\frac{R}{9} + \frac{R}{3} = \frac{N+4}{9}R.$$



Эквивалентная схема верхней половины

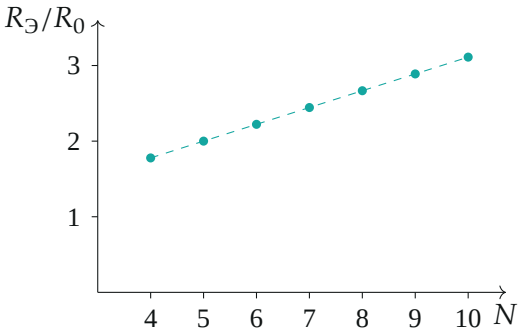
4. Ответ. С $R = 4R_0$:

$$R_Э = \frac{R_п}{2} = \frac{N+4}{18}R = \frac{2(N+4)}{9}R_0.$$

5. Второй способ — токи. Пусть в дуге звена, идущей через O_j, течёт ток I. Напряжение на звене одно: $I \cdot \frac{R}{3} = I' \cdot \frac{R}{6}$, значит, по прямой дуге течёт $I' = 2I$, через звено — $3I$, через всю половину — $3I$, через омметр — $6I$. Напряжение между A и B по верхней половине (закон Ома для каждого участка):

$$U = 3I\cdot\frac{R}{3} + (N-2)\cdot 2I\cdot\frac{R}{6} + 3I\cdot\frac{R}{3} = IR\,\frac{N+4}{3}, \qquad R_Э = \frac{U}{6I} = \frac{N+4}{18}R.$$

То же. Ещё проверка — расчёт полной цепи (без разреза) по правилам Кирхгофа на python для $N = 4\ldots8$ дал те же числа до шестого знака.



Сопротивление растёт линейно: каждое новое кольцо добавляет $\frac{2}{9}R_0$

Проверка. Размерность — омы. Каждое добавленное кольцо удлиняет цепочку на одно звено $R/9$ в каждой половине, то есть на $R/18 = \frac{2}{9}R_0$ — рост линейный, как и должно быть у длинной цепи.

Ответ. $R_Э = \dfrac{2(N+4)}{9}R_0.$