На льдине

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 10 класс, задача 1] «На льдине».

Рядом с мальчиком, стоящим на берегу реки, проплывает со скоростью v_0 тяжёлая льдина прямоугольной формы с ровной горизонтальной поверхностью. Мальчик пускает камень массы m скользить по поверхности льдины от её края. Начальная скорость камня равна скорости льдины и направлена под углом $\alpha = 60°$ к берегу (рис. 1). Мальчик заметил, что когда камень оказался на расстоянии h от ближайшего к нему края льдины, скорость камня была минимальной.

1. Какое количество теплоты Q выделится за время скольжения камня по поверхности льдины?
2. На каком расстоянии s от мальчика, стоящего на берегу реки, будет находиться камень в момент окончания его скольжения по льдине?

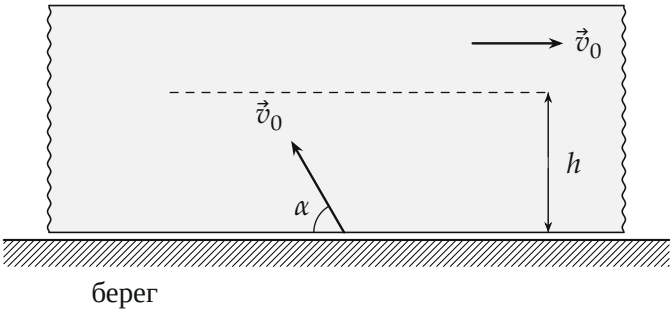

Рис. 1. Льдина плывёт вдоль берега со скоростью $\vec{v}_0$; камень пущен от края льдины со скоростью той же величины под углом α к берегу. Пунктир — расстояние h, на котором скорость камня минимальна.

▲ **Решение. Что происходит.** Льдина тяжёлая, трение камня её не разгоняет: она движется равномерно, и её система отсчёта инерциальна. В ней на камень действует только сила трения скольжения, постоянная по модулю и направленная против относительной скорости. Значит, относительно льдины камень едет по прямой и тормозится равнозамедленно

— до остановки. Это задача на переход в систему отсчёта, где движение простое: тепло считаем по энергии в системе льдины, а «минимум скорости» относительно берега расшифровываем треугольником скоростей.

Обозначения. Ось x — вдоль берега по течению, ось y — поперёк, от берега к середине реки. $\vec{v}_0$ — скорость льдины; $\vec{u}$ — скорость камня относительно льдины, $\vec{u}_0$ — в начальный момент; $\vec{v}$ — скорость камня относительно берега; T — время скольжения, L — путь камня по льдине.

Пункт 1.

1. Относительная скорость. Закон сложения скоростей: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$. В начальный момент скорость камня относительно берега по рис. 1 $\vec{v}_к = v_0(-\cos\alpha;\, \sin\alpha) = v_0(-\frac{1}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2})$, льдины — $v_0(1;\, 0)$, поэтому

$$\vec{u}_0 = \vec{v}_к - \vec{v}_0 = v_0\Big(-\frac{3}{2};\, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \qquad u_0 = v_0\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,v_0.$$

Направление $\vec{u}_0$ составляет с берегом угол β: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta = 30°$ (рис. 2).

2. Теплота — закон сохранения энергии в системе льдины. Система льдины инерциальна, сама льдина в ней не движется, и работа трения над льдиной равна нулю. Значит, вся кинетическая энергия камня относительно льдины переходит в теплоту, когда камень останавливается относительно неё:

$$Q = \frac{mu_0^2}{2} = \frac{3mv_0^2}{2}.$$

Пункт 2.

3. Когда скорость относительно берега минимальна. Сила трения в системе льдины постоянна, поэтому вектор $\vec{u}$ сохраняет направление $\vec{u}_0$ и равномерно убывает по модулю от u_0 до нуля. На треугольнике скоростей (рис. 2) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$: конец вектора $\vec{v}$ скользит по отрезку от точки A (начало, $\vec{v} = \vec{v}_к$) к точке B (конец скольжения, $\vec{v} = \vec{v}_0$). Длина $\vec{v}$ минимальна, когда $\vec{v} \perp AB$, то есть в основании перпендикуляра OM. Треугольник OAB равнобедренный: $OA = OB = v_0$. Высота OM рав-

нобедренного треугольника — медиана, M — середина AB. Значит, скорость камня минимальна, когда относительная скорость уменьшилась вдвое, $u = u_0/2$, то есть в момент $T/2$. Сама минимальная скорость $v_{\min} = v_0 \sin 30^\circ = v_0/2$.

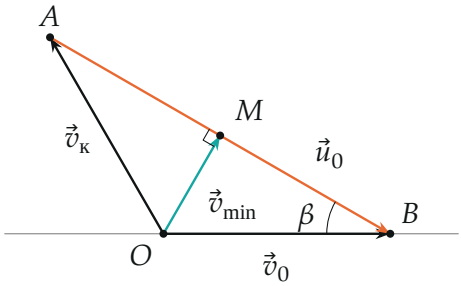

Рис. 2. Треугольник скоростей: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$. Конец $\vec{v}$ идёт по отрезку AB от A к B (относительная скорость $\vec{u}$ убывает до нуля). Минимум $|\vec{v}|$ — в середине M, так как $OA = OB = v_0$; угол $\beta = 30^\circ$.

4. Путь по льдине. Равнозамедленное движение до остановки: путь пропорционален квадрату оставшегося времени, поэтому за вторую половину времени камень проходит $\frac{1}{4}$ пути, за первую — $\frac{3}{4}$. В системе льдины расстояние от края растёт как $L' \sin\beta$, где L' — пройденный путь. К моменту $T/2$

$$h = \frac{3}{4}L\sin 30^\circ = \frac{3}{8}L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{8h}{3}, \qquad y_{\max} = L\sin 30^\circ = \frac{4h}{3}.$$

Расстояние от берега у льдины и у камня меряется одинаково (льдина движется вдоль берега), поэтому в конце камень на расстоянии $y_{\max} = \frac{4}{3}h$ от берега (рис. 3).

5. Время скольжения. Средняя относительная скорость при равнозамедленном торможении — $u_0/2$:

$$L = \frac{u_0}{2}T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2L}{\sqrt{3}\,v_0} = \frac{16h}{3\sqrt{3}\,v_0}.$$

6. Перемещение относительно берега. Перемещение камня относительно берега — сумма перемещения льдины $v_0 T$ вдоль x и перемеще-

ния по льдине L под углом β против оси x:

$$S_x = v_0 T - L\cos 30^\circ = \frac{16h}{3\sqrt{3}} - \frac{8h}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16h-12h}{3\sqrt{3}} = \frac{4h}{3\sqrt{3}}, \qquad S_y = \frac{4h}{3}.$$

$S_x > 0$: камень в итоге оказывается чуть ниже мальчика по течению. Мальчик стоит у точки старта, поэтому

$$s = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = h\sqrt{\frac{16}{27} + \frac{48}{27}} = \frac{8h}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}54\,h.$$

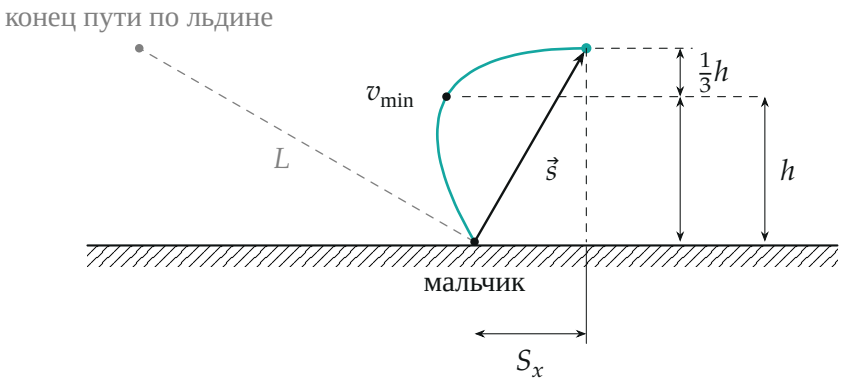

Рис. 3. Траектория камня относительно берега (бирюзовая, по вычисленным точкам) и его путь по льдине длиной $L = \frac{8}{3}h$ (серый пунктир). Ближайшая к берегу точка скорости $v_{\min}$ — на расстоянии h; конец — на $h + \frac{1}{3}h = \frac{4}{3}h$ от берега и на S_x ниже по течению.

Обратите внимание. В системе берега кинетическая энергия камня в начале и в конце одна и та же, $mv_0^2/2$, но теплота не равна нулю: трение совершает работу и над льдиной, которая в этой системе движется. Тепло честно считается только там, где льдина покоится.

Проверка. Размерности: $[Q]$ = Дж, $[s]$ = м. Минимум скорости независимо, через проекцию: $|\vec{v}|$ минимальна, когда $\vec{v} \perp \vec{u}_0$, то есть $\vec{v}_0 \cdot \hat{u} + u = 0$, $u = -\vec{v}_0 \cdot \hat{u} = v_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 = \frac{u_0}{2}$ — та же середина торможения. Численный счёт траектории (рис. 3) даёт ту же точку

$y = h$ при $t = T/2$ и конец $(0{,}770h;\ 1{,}333h)$, $s = 1{,}540h$. Смысл: камень проходит по льдине больше, чем льдина успевает его снести, и ложится почти напротив мальчика, чуть ниже по течению.

Ответ. 1) $Q = \dfrac{3mv_0^2}{2}$; 2) $s = \dfrac{8h}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}54\,h$.