# Раздельный вылет

**Задача 2.** [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 10 класс, задача 2] «Раздельный вылет».

Двум одинаковым соприкасающимся шарикам радиуса $r = 5$ см сообщают горизонтальную скорость $u$. Шарики движутся по нижнему колену закреплённой стоящей на боку U-образной трубки (рис. 2). Расстояние между осями колен $h = 1{,}00$ м, они спряжены по полуокружности, трения в системе нет, зазор между стенками и шариками мал.

При каких значениях скорости $u$ один шарик вылетит из верхнего колена, а другой из нижнего? Ускорение свободного падения $g$.

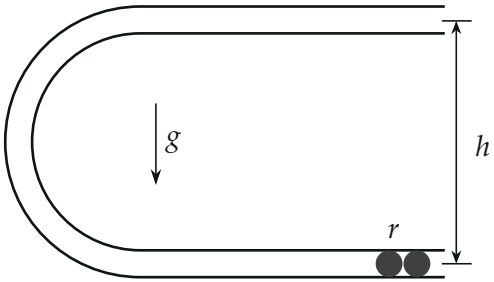


*Рис. 2. U-образная трубка на боку; два шарика радиуса r в нижнем колене, расстояние между осями колен h.*

▲ **Решение. Что происходит.** Пока шарики едут вместе, задний толкает передний или наоборот — это решает сила их давления друг на друга. На скруглении на каждый шарик действует «скатывающая» составляющая силы тяжести $mg\sin\theta$, где $\theta$ — угол положения шарика, отсчитанный от нижней точки скругления. Внизу скругления у переднего шарика $\theta$ больше и тормозит его сильнее — задний на него давит. В верхней половине уже задний тормозится сильнее — шарики расходятся. Это задача на «момент отрыва»: находим положение, где сила взаимодействия обращается в нуль, а дальше считаем каждый шарик отдельно по закону сохранения энергии.

**Обозначения.** $O$ — центр полуокружности; центры шариков на скруглении идут по окружности радиуса $R = h/2$; $\theta_1$, $\theta_2$ — углы переднего и заднего шариков от нижней точки; $v$ — скорость шариков в момент отрыва; высоты центров отсчитываем от оси нижнего колена.

**1. Где шарики перестают давить друг на друга.** Второй закон Ньютона для каждого шарика в проекции на касательную к траектории его центра (нормальная к стенке сила на касательную не проецируется):

$$ma_1 = -mg\sin\theta_1 + N, \qquad ma_2 = -mg\sin\theta_2 - N,$$

где $N \geq 0$ — сила, с которой задний шарик толкает передний вперёд (по третьему закону Ньютона передний давит на задний назад) (она направлена вдоль линии центров; при малом расстоянии между шариками по сравнению с $R$ эта линия почти совпадает с касательной). Пока шарики вместе, $a_1 = a_2$, откуда

$$N = \frac{mg}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2).$$

Передний шарик впереди, $\theta_1 > \theta_2$. Пока оба угла меньше 90°, $\sin\theta_1 > \sin\theta_2$ и $N > 0$: передний тормозится сильнее, задний его подпирает. Сила обращается в нуль, когда $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ при $\theta_1 \neq \theta_2$, то есть $\theta_1 + \theta_2 = 180°$ (рис. 3): шарики расположены симметрично относительно горизонтали через $O$. Дальше $\sin\theta_1 < \sin\theta_2$, передний тормозится слабее и уходит вперёд — контакт исчезает.

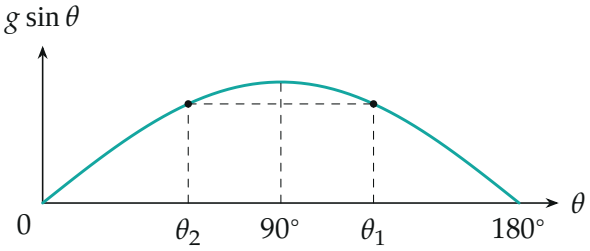


*Рис. 3. Скатывающее ускорение $g\sin\theta$ на скруглении. Шарики «тормозятся» одинаково, когда их углы симметричны относительно 90°: $\theta_1 + \theta_2 = 180°$ (для наглядности угол между шариками увеличен; на самом деле он около 11,5°).*

**2. Геометрия момента отрыва.** Центры шариков отстоят на $2r$ и симметричны относительно горизонтали через $O$, значит, линия центров

вертикальна, а центры лежат на $r$ выше и на $r$ ниже точки $O$ (рис. 4). Высоты центров над осью нижнего колена: у переднего $R + r$, у заднего $R - r$. Точка касания шариков — на одной горизонтали с $O$.

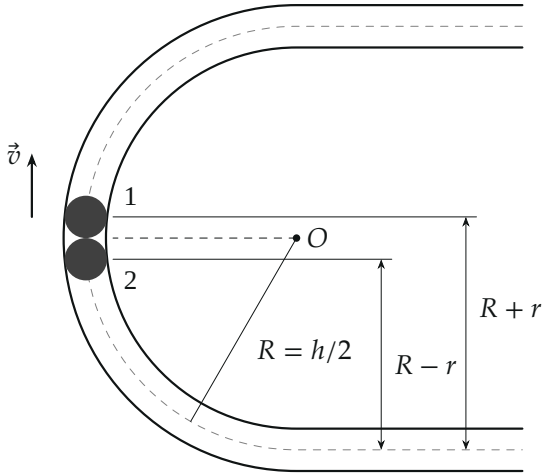


*Рис. 4. Момент отрыва: передний шарик 1 на r выше центра O, задний 2 — на r ниже; оба движутся вверх со скоростью v. Пунктир — ось трубки (траектория центров).*

**3. Скорость в момент отрыва.** Трения нет, нормальные силы стенок работы не совершают, а силы давления шариков друг на друга внутренние и в сумме работы не совершают (шарики движутся вместе). Закон сохранения механической энергии для системы двух шариков от начала до отрыва; центр масс поднялся на $R$:

$$2 \cdot \frac{mu^2}{2} = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + 2mgR \quad \Rightarrow \quad v^2 = u^2 - gh.$$

Нужно, чтобы шарики вообще дошли до этого положения: $u^2 > gh$; ниже это условие окажется выполненным с запасом.

**4. Передний шарик вылетает из верхнего колена.** После отрыва шарики движутся отдельно. Закон сохранения энергии для переднего шарика от отрыва до верхнего колена (поднимается ещё на $2R-(R+r) =$

$R-r$): ему нужна неотрицательная скорость на высоте $2R$,

$$v^2-2g(R-r)>0 \quad\Rightarrow\quad u^2-gh-gh+2gr>0 \quad\Rightarrow\quad u^2>2g(h-r).$$

Иначе он остановится на скруглении и скатится обратно.

**5. Задний шарик возвращается в нижнее колено.** Закон сохранения энергии для заднего шарика от отрыва (высота $R-r$) до верхнего колена (высота $2R$): он не должен туда добраться,

$$v^2-2g(R+r)<0 \quad\Rightarrow\quad u^2<2g(h+r).$$

Тогда он остановится на скруглении и скатится назад, к нижнему колену. Передний шарик к этому моменту уже ушёл вверх (он тормозится слабее), так что шарики больше не встретятся.

**6. Ответ числом.** Объединяем:

$$2g(h-r)<u^2<2g(h+r), \qquad \sqrt{2g(h-r)}<u<\sqrt{2g(h+r)}.$$

При $g=10$ м/с$^2$: 4,36 м/с $<u<$ 4,58 м/с; при $g=9{,}8$ м/с$^2$: 4,32 м/с $<u<$ 4,54 м/с. Условие $u^2>gh$ из пункта 3 выполнено, так как $2g(h-r)>gh$ при $r<h/2$.

**Обратите внимание.** Шарики расходятся не в верхней точке и не на входе в скругление, а там, где точка их касания на уровне центра $O$: именно там выравниваются скатывающие ускорения. Если считать, что они едут вместе до самого верха, ответа «одному вверх, другому вниз» не получится вовсе.

**Проверка.** Размерность: $[gh]=$ м$^2$/с$^2$. Предел $r\to 0$: интервал стягивается в точку $u^2=2gh$ — точечные шарики в одном месте ведут себя одинаково, разделиться не могут. Ширина интервала по энергии $4gr$: это разница высот центров в момент отрыва $2r$, умноженная на $2g$, — ровно разница энергий двух шариков, «распределённых» отрывом. Смысл: передний шарик выигрывает у заднего высоту $2r$, и при правильной скорости этого хватает, чтобы один перевалил, а другой нет.

**Ответ.** $2g(h-r)<u^2<2g(h+r)$, то есть $\sqrt{2g(h-r)}<u<\sqrt{2g(h+r)}$; при $g=10$ м/с$^2$: 4,36 м/с $<u<$ 4,58 м/с.