Мостик с диодами и конденсаторами

Задача 4. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 10 класс, задача 4] «Мостик с диодами и конденсаторами».

Электрическая цепь (рис. 1) составлена из трёх одинаковых конденсаторов ёмкостью $C_1 = C_2 = C_3 = C$, двух одинаковых диодов, двух идеальных амперметров, ключа и регулируемого источника напряжения. Зависимость силы тока через диод от напряжения на нём представлена на рис. 2.

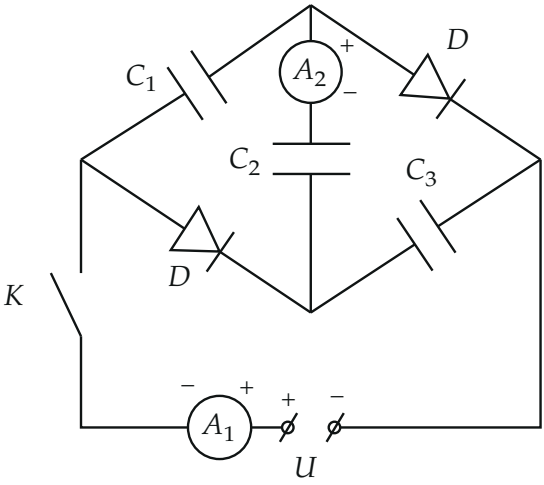

Рис. 1.

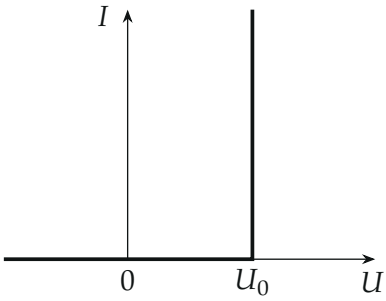

Рис. 2.

1. Пусть напряжение источника постоянно и равно $3U_0$. Сколько теплоты выделится в цепи при замыкании ключа K?
2. Пусть напряжение источника зависит от времени $U = U(t)$ так, как показано на рис. 3. Ключ K постоянно замкнут. Определите зависимости от времени $I_1(t)$ и $I_2(t)$ показаний амперметров A_1 и A_2. Нарисуйте графики зависимостей $I_1(t)$ и $I_2(t)$ с указанием значений характерных точек на графике. Полярность источника и полярность подключения амперметров указаны на рис. 1. Во всех случаях в начальный момент времени конденсаторы не заряжены.

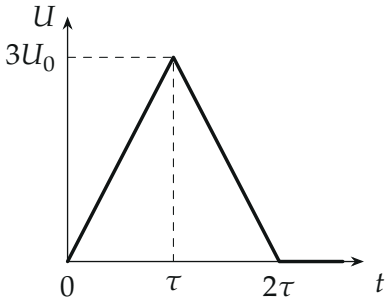

Рис. 3.

▲ **Решение. Что происходит.** Диод с такой характеристикой — «клапан с порогом»: пока напряжение на нём меньше U_0, тока нет и диода как будто нет; когда ток идёт, напряжение на нём ровно U_0, и он работает как «батарейка» U_0. Это задача на перебор состояний диодов: предполагаем, что диоды закрыты, находим, при каком напряжении источника это предположение нарушится, потом пишем условия для открытых диодов. Ток через амперметр — скорость изменения заряда на обкладках, к которым он подключён.

Обозначения. Узлы схемы (рис. 4): a — левый (к нему через ключ и A_1 подходит «+» источника), b — верхний, c — нижний, d — правый (к нему подходит «−»). U — напряжение источника, $\varphi_a - \varphi_d = U$. Напряжения конденсаторов со знаком по обходу слева направо: $U_1 = \varphi_a - \varphi_b$, $U_2 = \varphi_b - \varphi_c$, $U_3 = \varphi_c - \varphi_d$; их заряды $q_i = CU_i$ — заряды «левых/верхних» обкладок. Левый диод проводит от a к c, правый — от b к d; Q_{ac}, Q_{bd} — заряды, прошедшие через них.

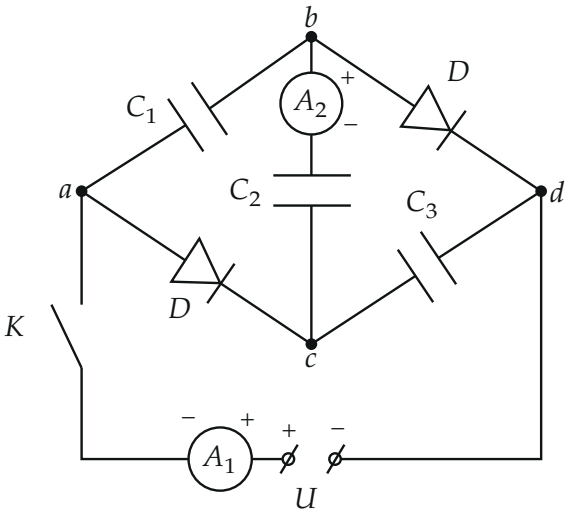

Рис. 4. Узлы схемы и знаки напряжений конденсаторов. Левый диод параллелен цепочке C_1C_2, правый — цепочке C_2C_3.

Пункт 1.

1. Диоды закрыты. Тогда конденсаторы соединены последовательно и заряжены одинаково (заряд узлов b и c сохраняется и равен нулю): $U_1 = U_2 = U_3 = U/3$. Левый диод подключён к узлам a и c, напряжение на нём $U_1 + U_2 = 2U/3$; на правом $U_2 + U_3 = 2U/3$. Оба диода откроются одновременно, когда $2U/3 = U_0$, то есть при

$$U = \tfrac{3}{2}U_0.$$

При $U = 3U_0$ это предположение неверно — диоды открыты.

2. Диоды открыты. Закон Кирхгофа для напряжений: в контуре источника и в контурах с каждым диодом

$$U_1 + U_2 + U_3 = U, \qquad U_1 + U_2 = U_0, \qquad U_2 + U_3 = U_0.$$

Отсюда

$$U_1 = U_3 = U - U_0, \qquad U_2 = 2U_0 - U.$$

При $U = 3U_0$: $U_1 = U_3 = 2U_0$, $U_2 = -U_0$ — второй конденсатор перезарядился, его верхняя обкладка теперь отрицательна.

3. Заряды через диоды и источник. Закон сохранения заряда для изолированного узла b (к нему подходят обкладки C_1, C_2 и правый диод, через который заряд только уходит): $-q_1 + q_2 = -Q_{bd}$; для узла c: $-q_2 + q_3 = Q_{ac}$. Значит,

$$Q_{bd} = q_1 - q_2 = C(2U - 3U_0), \qquad Q_{ac} = q_3 - q_2 = C(2U - 3U_0).$$

При $U = 3U_0$ оба равны $3CU_0 > 0$ — заряд прошёл в разрешённом направлении, предположение об открытых диодах непротиворечиво. Через источник прошёл заряд, ушедший из узла a на обкладку C_1 и в левый диод:

$$q_{\text{ист}} = q_1 + Q_{ac} = 2CU_0 + 3CU_0 = 5CU_0.$$

4. Теплота — закон сохранения энергии. Источник с постоянным напряжением $3U_0$ совершил работу $A = q_{\text{ист}} \cdot 3U_0 = 15\,CU_0^2$. Энергия конденсаторов

$$W = \frac{C(2U_0)^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} + \frac{C(2U_0)^2}{2} = 4{,}5\,CU_0^2.$$

Остальное — теплота в проводах и диодах:

$$Q = A - W = 10{,}5\,CU_0^2.$$

Пункт 2.

5. Что показывают амперметры. A_1 стоит последовательно с источником, ток в нём положителен, когда заряд идёт от «+» источника к узлу a: $I_1 = \dfrac{dq_{\text{ист}}}{dt}$. A_2 стоит над C_2 «плюсом» к узлу b: $I_2 = \dfrac{dq_2}{dt}$. Скорость роста напряжения: $\dfrac{dU}{dt} = \dfrac{3U_0}{\tau}$ при $0 < t < \tau$ и $-\dfrac{3U_0}{\tau}$ при $\tau < t < 2\tau$.

6. $0 < t < \tau/2$**: диоды закрыты.** Напряжение растёт до $\frac{3}{2}U_0$ ровно к $t = \tau/2$. Все заряды $q_i = CU/3$:

$$I_1 = I_2 = \frac{C}{3} \cdot \frac{3U_0}{\tau} = \frac{CU_0}{\tau}.$$

7. $\tau/2 < t < \tau$**: диоды открыты.** Из пункта 3 $q_{\text{ист}} = q_1 + Q_{ac} = C(U - U_0) + C(2U - 3U_0) = C(3U - 4U_0)$, $q_2 = C(2U_0 - U)$:

$$I_1 = 3C \cdot \frac{3U_0}{\tau} = \frac{9CU_0}{\tau}, \qquad I_2 = -C \cdot \frac{3U_0}{\tau} = -\frac{3CU_0}{\tau}.$$

Ток I_2 отрицателен: C_2 разряжается, а затем перезаряжается в обратную сторону.

8. $\tau < t < 2\tau$**: напряжение падает.** Проверим, что диоды закрываются. Если тока через них нет, конденсаторы меняют заряд одинаково (узлы b и c снова изолированы): $\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = \Delta U/3 < 0$. Напряжение на левом диоде $U_1 + U_2 = U_0 + \frac{2}{3}\Delta U < U_0$ — ток через диод не пойдёт (обратно он не пропускает), предположение верно; для правого так же. Значит,

$$I_1 = I_2 = \frac{C}{3} \cdot \left(-\frac{3U_0}{\tau}\right) = -\frac{CU_0}{\tau}.$$

К моменту 2τ: $U_1 = U_3 = 2U_0 - U_0 = U_0$, $U_2 = -U_0 - U_0 = -2U_0$ (сумма $0 = U$, как и должно быть).

9. $t > 2\tau$**.** Напряжение не меняется, заряды тоже: $I_1 = I_2 = 0$. Конденсаторы так и остаются заряженными (рис. 5).

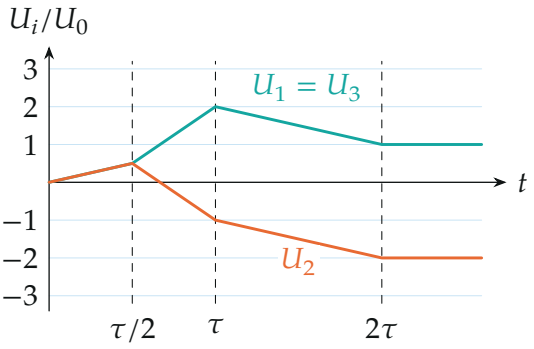

Рис. 5. Напряжения на конденсаторах: до $\tau/2$ *все одинаковы, затем* C_2 *перезаряжается (диоды открыты), после* τ *все меняются одинаково.*

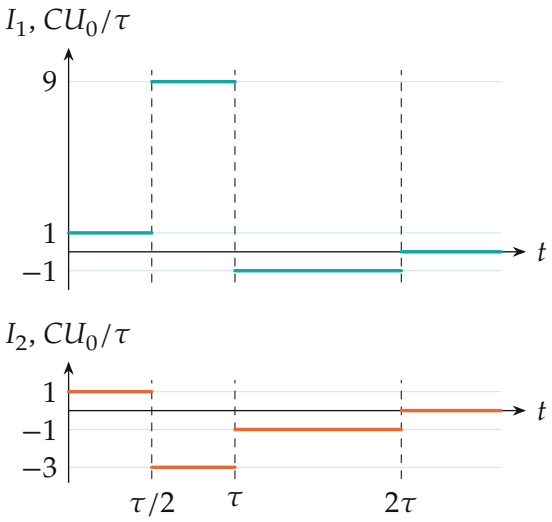

Рис. 6. Показания амперметров $I_1(t)$ (вверху) и $I_2(t)$ (внизу) в единицах CU_0/τ.

Обратите внимание. Работа источника в пункте 1 равна $q_{\text{ист}} \cdot 3U_0$ только потому, что напряжение включено сразу полностью. При медленном подъёме до того же $3U_0$ заряд проходит при меньших напряжениях, работа меньше, и теплота меньше — $6\,CU_0^2$ (см. проверку), хотя конечное состояние то же.

Проверка. Размерности: $[CU_0^2] =$ Дж, $[CU_0/\tau] =$ А. Второй способ: при медленном росте напряжения (пункт 2, $0 < t < \tau$) работа источника $\int U\,dq_{\text{ист}} = \frac{C}{3} \cdot \frac{(1{,}5U_0)^2}{2} + 3C \cdot \frac{(3U_0)^2 - (1{,}5U_0)^2}{2} = 10{,}5\,CU_0^2$, энергия конденсаторов $4{,}5\,CU_0^2$, разность $6\,CU_0^2$ — это ровно теплота в диодах $U_0(Q_{ac} + Q_{bd}) = U_0 \cdot 6CU_0$: заряды пункта 3 согласованы с законом сохранения энергии. Заряд через A_1 за $0 < t < \tau$: $\frac{CU_0}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{9CU_0}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2} = 5CU_0$ — тот же, что в пункте 1. Смысл: диоды «запирают» в цепи заряд, и после цикла напряжения конденсаторы остаются заряженными.

Ответ. 1) $Q = 10{,}5\,CU_0^2$; 2) $I_1 = I_2 = \frac{CU_0}{\tau}$ при $0 < t < \frac{\tau}{2}$; $I_1 = \frac{9CU_0}{\tau}$, $I_2 = -\frac{3CU_0}{\tau}$ при $\frac{\tau}{2} < t < \tau$; $I_1 = I_2 = -\frac{CU_0}{\tau}$ при $\tau < t < 2\tau$; 0 при $t > 2\tau$.