Ом-м-м...

Задача 5. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 10 класс, задача 5] «Ом-м-м...».

Электрическая цепь (рис. 2) собрана из одинаковых омметров и резистора, сопротивление которого $R = 1$ кОм. Все омметры включены в цепь так, что у приборов с нечётным номером клемма, помеченная знаком плюс, находится слева, а у чётных — сверху. Определите показания первого, четвёртого и тринадцатого омметров.

Указание: считайте, что омметр состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U, резистора сопротивлением $R = 1$ кОм и идеального амперметра (рис. 1). При подключении к омметру исследуемого резистора показания амперметра, встроенного в омметр, автоматически пересчитываются (например, с помощью встроенного микропроцессора) так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления исследуемого резистора R_x, подключённого к омметру.

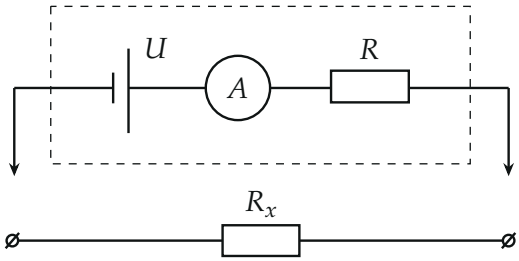

Рис. 1. Модель омметра (в пунктирной рамке) и исследуемый резистор R_x.

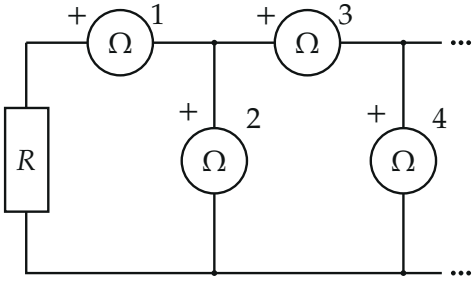

Рис. 2. Бесконечная цепочка омметров.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый омметр — это батарейка U с внутренним сопротивлением R; прибор измеряет ток I через себя и показывает $R_x = U/I - R$ — то сопротивление, через которое шёл бы такой ток, если бы омметр был один. Ток $I = U/R$ он показывает как $R_x = 0$, нулевой ток — как $R_x = \infty$. Цепочка бесконечная, поэтому главная идея — самоподобие: часть цепи справа от любого звена такая же, как вся цепь, и её можно заменить эквивалентным источником $\mathcal{E}_0$ с внутренним сопротивлением R_0.

Обозначения. I_k — ток через k-й омметр, положителен, если он выходит из клеммы «+» во внешнюю цепь (так омметр «работает» как источник); $\mathcal{E}_0$, R_0 — ЭДС и сопротивление всей цепочки омметров, начиная с первого, относительно её левого верхнего и нижнего концов; узлы верхнего провода: P_0 — у резистора R, P_1 — между омметрами 1 и 3, P_2 — между 3 и 5 и т. д. (рис. 4), φ_0, φ_1, …— их потенциалы; потенциал нижнего провода примем за нуль.

1. Эквивалентный источник. Цепочка, начиная с омметра 1, — это омметр 1, последовательно с ним параллельное соединение омметра 2 и той же самой бесконечной цепочки, начиная с омметра 3 (рис. 3). Отбрасывание одного звена бесконечную цепочку не меняет, поэтому вторая часть тоже имеет параметры $\mathcal{E}_0$, R_0; полярность у неё та же, «+» сверху, как у омметра 2.

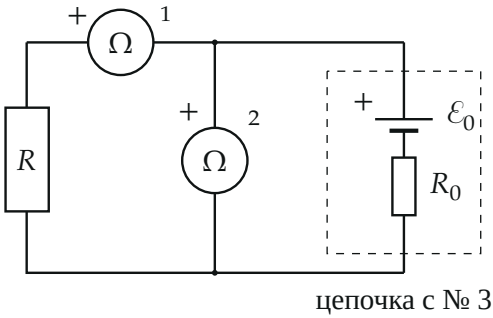

Рис. 3. Самоподобие: цепочка начиная с омметра 3 заменена тем же эквивалентным источником $\mathcal{E}_0$, R_0 («+» сверху).

Правила соединения источников. Параллельно соединённые омметр 2 (U, R) и цепочка $(\mathcal{E}_0, R_0)$ — источник с

$$R_\parallel = \frac{RR_0}{R+R_0}, \qquad \mathcal{E}_\parallel = \Big(\frac{U}{R} + \frac{\mathcal{E}_0}{R_0}\Big)R_\parallel.$$

Последовательно с ним омметр 1, «+» которого слева, то есть со стороны внешнего вывода, — ЭДС складываются:

$$R_0 = R + \frac{RR_0}{R+R_0}, \qquad \mathcal{E}_0 = U + \Big(\frac{U}{R} + \frac{\mathcal{E}_0}{R_0}\Big)\frac{RR_0}{R+R_0}.$$

Первое уравнение: $R_0^2 - RR_0 - R^2 = 0$, положительный корень

$$R_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R.$$

Второе, умноженное на $(R+R_0)$: $\mathcal{E}_0(R+R_0) = U(R+R_0) + UR_0 + \mathcal{E}_0 R$, откуда $\mathcal{E}_0 R_0 = U(R+2R_0)$ и

$$\mathcal{E}_0 = U\Big(2 + \frac{R}{R_0}\Big) = U\Big(2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}U.$$

2. Ток через резистор и первый омметр. Закон Ома для полной цепи: резистор R подключён к источнику $(\mathcal{E}_0, R_0)$, ток через R и через омметр 1 один и тот же:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{R+R_0} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}U}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}R} = \frac{U}{R}.$$

Показание первого омметра

$$R_{x1} = \frac{U}{I_1} - R = 0.$$

3. Второй омметр. Потенциал узла P_0: $\varphi_0 = I_1 R = U$. Закон Ома для участка с омметром 1 (ток выходит из его «+», слева): $\varphi_0 - \varphi_1 =$

$U - I_1 R = 0$, то есть $\varphi_1 = U$. Для омметра 2 («+» сверху, к узлу P_1): $\varphi_1 - 0 = U - I_2 R$, откуда

$$I_2 = \frac{U - \varphi_1}{R} = 0, \qquad R_{x2} = \frac{U}{0} - R = \infty.$$

Второй способ — закон Кирхгофа для контура «резистор — омметр 1 — омметр 2»: $2U = I_1 R + I_1 R + I_2 R$, и при $I_1 = U/R$ получаем $I_2 = 0$.

4. Дальше по цепочке. В цепочку, начиная с омметра 3, втекает ток $I_1 - I_2 = U/R$, и напряжение на ней $\varphi_1 = U$. Это ровно то же, что было в узле P_0: к цепочке $(\mathcal{E}_0, R_0)$ приложено напряжение U и через неё идёт ток U/R (проверка: $\mathcal{E}_0 - \frac{U}{R} R_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} U - \frac{1+\sqrt{5}}{2} U = U$). Значит, омметр 3 оказывается в том же положении, что омметр 1, омметр 4 — что омметр 2, и так далее (рис. 4): по верхнему проводу всюду течёт ток U/R, все узлы верхнего провода имеют потенциал U, через вертикальные омметры ток не идёт.

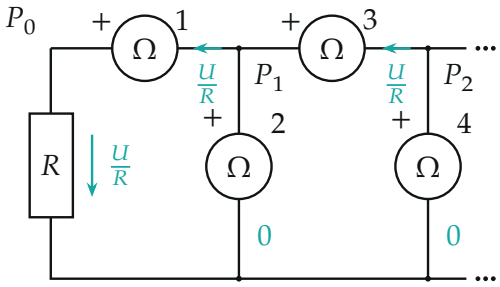

Рис. 4. Распределение токов: по нечётным омметрам и резистору течёт U/R, через чётные — ноль; все узлы верхнего провода под потенциалом U.

Нечётные омметры показывают 0, чётные — ∞ (перегрузку): $R_{x1} = R_{x13} = 0$, $R_{x4} = \infty$.

Обратите внимание. Ответ не зависит ни от U, ни от R: всё решает то, что омметры одинаковые, а внешний резистор равен их внутреннему сопротивлению. Удобно проверить это и без эквивалентного источника: предположим, что токи такие, как на рис. 4, — тогда законы Кирхгофа выполняются в каждом узле и каждом контуре.

Проверка. Размерность: $[U/R] = \text{А}$. Подстановка в законы Кирхгофа: в каждый узел P_k верхнего провода приходит U/R от омметра справа и уходит U/R в омметр слева, через вертикальный — 0; напряжение на нечётном омметре $U - \frac{U}{R}R = 0$, на чётном $U - 0 = U$ — отсюда одинаковые потенциалы U всех узлов P_k. Численное решение цепочки из 30 звеньев (python) даёт $I_1 = I_{13} = U/R$ и $|I_2|, |I_4| < 10^{-11}\, U/R$. Смысл: каждый нечётный омметр «замыкается» на резистор, равный своему внутреннему, и видит его как нулевое сопротивление, а чётные зажаты между точками с одинаковым потенциалом.

Ответ. Первый и тринадцатый омметры показывают 0, четвёртый — ∞ (ток через него равен нулю).