Физика желеобразных веществ

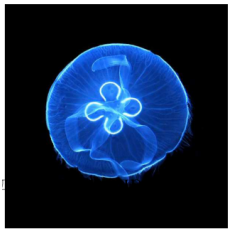
Задача 1. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Физика желеобразных веществ».

Примечание. Чтобы плавно регулировать напряжение на источнике, поверните ручку пределов напряжения в крайнее правое положение (от 0 до 15 В). Остальные положения ручки задают фиксированное значение напряжения.

Примечание. Проверьте, что перед включением два левых тумблера повёрнуты до конца по часовой стрелке, а два правых тумблера — против часовой стрелки. Для изменения напряжения пользуйтесь двумя правыми тумблерами: «COARSE» для грубого изменения и «FINE» для плавного.

В данной работе предлагается исследовать механические свойства желеобразных веществ, к которым относятся желе, гели, студни. Встречаются и животные с желеобразными телами, например, медуза Аурелия ушастая (Moon Jelly) с прозрачным студенистым телом.





Желеобразные вещества занимают промежуточное положение между жидкими и твёрдыми веществами. Они характеризуются отсутствием текучести, способностью сохранять форму, прочностью, упругими свойствами. В данной работе вам предстоит определить модуль Юнга E и скорость звука c в желатине. В этой работе вам могут помочь следующие теоретические сведения.

Модуль Юнга характеризует упругие свойства вещества, определяя жёсткость различных конструкций. Например, небольшая относительная деформация ε цилиндра сечением S и высотой h под действием растягивающей (или сжимающей) силы F равна (по определению модуля

Юнга):

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} = \frac{F}{ES}.$$

Изгиб цилиндра. Пусть цилиндр закреплён в вертикальном положении. Если к верхнему основанию приложить момент сил M, оно наклонится на угол φ к горизонту. По закону Гука при малых деформациях $M = \kappa\varphi$, где κ — жёсткость цилиндра на изгиб. Она определяется модулем Юнга и геометрическими параметрами цилиндра по формуле $\kappa = E\dfrac{\pi R^4}{4h}$, где R — радиус цилиндра, а h — его высота.

Кручение цилиндра. Верхнее основание цилиндра относительно нижнего, закреплённого, основания можно повернуть на угол φ вокруг оси цилиндра в горизонтальной плоскости. При небольших деформациях по закону Гука момент сил M, необходимый для закручивания цилиндра, также пропорционален углу φ: $M = \chi\varphi$, где $\chi \approx E\pi R^4/(6h)$ — крутильная жёсткость желатинового цилиндра.

Крутильные колебания возникают, если прикреплённый к верхнему основанию цилиндра стержень отклонить в горизонтальной плоскости от положения равновесия на некоторый угол и отпустить (нижнее основание цилиндра закреплено). Период гармонических колебаний такого Т-образного крутильного маятника определяется крутильной жёсткостью цилиндра и моментом инерции I маятника относительно оси вращения: $T = 2\pi\sqrt{I/\chi}$.

Момент инерции крутильного маятника (подобно массе груза для пружинного маятника) определяет его инерционность. Так, момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой m_0 относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, равен $I_{\text{ст}} = \dfrac{m_0 l^2}{12}$. Если же на стержень нацепить небольшой грузик массой m на расстоянии r от оси вращения, то момент инерции маятника увеличится на величину момента инерции грузика $\Delta I = I_m = mr^2$ и станет равным $I = I_{\text{ст}} + mr^2$. Это связано с тем, что момент инерции — величина аддитивная.

Модуль Юнга входит в формулу для скорости звука в различных материалах. Если, например, по торцу тонкого стержня ударить молот-

ком, то по стержню побежит продольная звуковая волна со скоростью $c = \sqrt{E/\rho}$. Так, для стали с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7{,}9$ г/см^3 эта скорость составляет $c = \sqrt{E/\rho} \approx 5$ км/с.

Задание

1.1. Изготовьте из желатинового цилиндра диаметром $D = 29$ мм и длинной деревянной линейки Т-образный маятник (при необходимости, если недостаточно собственной «липкости» желатина, линейку можно подклеить к цилиндру, а сам цилиндр к деревянной подставке с помощью «желатинового» клея). Исследуйте желатиновый цилиндр на изгиб статическим методом. Для этого снимите зависимость $\varphi(M)$ — изменения угла φ наклона линейки Т-образного маятника под действием приложенного к линейке момента сил M. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

1.2. Результаты измерений п. 1.1 представьте графически.

1.3. По результатам эксперимента п. 1.1 получите значение модуля Юнга E желатина. Оцените погрешность измерений.

2.1. Исследуйте желатиновый цилиндр Т-образного маятника на кручение динамическим методом. Для этого исследуйте зависимость изменения периода $T_{\text{крут}}$ крутильных колебаний маятника от изменения момента его инерции. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

2.2. Результаты измерений п. 2.1 представьте графически.

2.3. По результатам измерений п. 2.1 получите значение модуля Юнга E желатина. Оцените погрешность измерений.

3.1. Исследуя поведение тонких ($d = 19{,}5$ мм) желатиновых цилиндров на вибрирующей подставке, определите скорость продольных звуковых волн $c_э$ в желатине. Желатиновые цилиндры выдавливаются из шприцов с помощью поршня. Для приготовления цилиндров необходимой длины используйте канцелярский нож. Зарисуйте схему установки и опишите методику измерений.

Внимание: не подавайте на электромоторчик напряжение, превышающее 9,5 В. Совет: отрезать нужную длину образца лучше по мере выдавливания цилиндра, прижимая нож к торцу шприца. Подсказка: вибриру-

ющая подставка может быть реализована с помощью линейки с закреплённым на ней электромоторчиком.

3.2. Сравните полученное значение $c_э$ с теоретическим, рассчитанным по формуле $c_т = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга, определённый статическим или динамическим методом. Плотность желатина $\rho = 1{,}05$ г/см^3.

4. С помощью пластиковой ложечки съешьте фруктовое желе. Запишите свои впечатления. Зарисовывать схему установки, описывать методику поедания, определять модуль Юнга и делать оценку погрешности в этом пункте не надо. Ашларыгыз тэмле булсын! Примечание. Этот пункт можно выполнить в любой момент.

Оборудование. Широкий шприц с внутренним диаметром $D = 29$ мм, деревянная подставка, 3 маленьких шприца с внутренним диаметром $d = 19{,}5$ мм, электромоторчик постоянного тока с эксцентриком, закреплённый на деревянной линейке, регулируемый источник постоянного тока, стробоскопический тахометр, секундомер, деревянная линейка, канцелярский нож, 2 одинаковые большие гайки массой $m_г = 9{,}75$ г каждая, канцелярская клипса, фруктовое желе (яблочное, вишнёвое или клубничное), пластиковая (одноразовая) ложечка. Клей (расплавленный желатин) по требованию.

▲ **Решение. Что происходит.** Желатиновый цилиндр — упругий стержень: жёсткость на изгиб $\kappa = E\pi R^4/(4h)$, жёсткость на кручение $\chi = E\pi R^4/(6h)$ и скорость продольной волны $c = \sqrt{E/\rho}$ выражаются через один и тот же модуль Юнга E. Поэтому работа — три независимых измерения одной величины: статическое (момент гайки → угол наклона), динамическое (момент инерции → период крутильных колебаний) и резонансное (стоячая волна в цилиндре). В каждом методе подбираем величины так, чтобы получилась прямая: её наклон несёт E (или c), а разброс точек около неё даёт погрешность.

Обозначения. $R = D/2 = 14{,}5$ мм; $h = (35 \pm 1)$ мм — высота цилиндра в пп. 1, 2; $\rho = 1{,}05$ г/см^3; $g = 9{,}8$ м/с^2; $m = m_г = 9{,}75$ г — масса одной гайки (дана в списке оборудования). Согласие двух методов (проверка ниже) от m вообще не зависит.

Пункт 1. Статический метод (1.1–1.3). *Установка и методика.* Ци-

линдр, отрезанный от толстого шприца, приклеиваем нижним основанием к подставке, а к верхнему — линейку, так что без нагрузки она горизонтальна. Гайку кладём на линейку на расстоянии r от оси цилиндра (если гайка сползает, закрепляем её желатиновым клеем) и измеряем высоту y конца линейки над столом: сначала без гайки ($y_0 = 4{,}4$ см), затем при $r = 2, 3, \ldots, 8$ см — семь положений гайки. До точки измерения от оси $l = 25{,}5$ см (значение восстановлено по столбцу φ таблицы организаторов: $\Delta y / \operatorname{tg}\varphi$ одно и то же в каждой строке). Из треугольника на рисунке

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{l}, \qquad \Delta y = y - y_0.$$

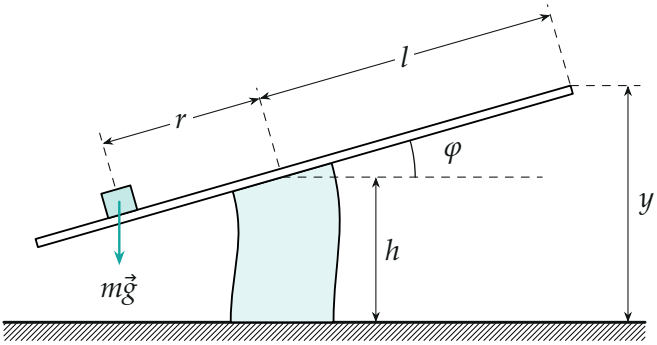


Схема статического опыта.

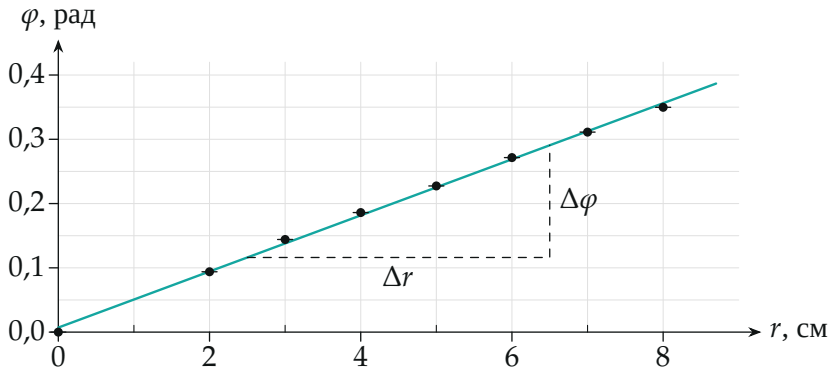
Теория. Рассмотрим установившееся положение. Относительно оси изгиба на верхнее основание действует момент силы тяжести гайки $M = mgr\cos\varphi \approx mgr$ (вес самой линейки даёт постоянный момент, он исключён нулевым отсчётом y_0). Закон Гука для изгиба: упругий момент цилиндра $\kappa\varphi$ уравновешивает этот момент:

$$\kappa\varphi = mgr \;\Rightarrow\; \varphi = sr, \qquad s = \frac{mg}{\kappa} = \frac{4mgh}{\pi E R^4}.$$

Зависимость $\varphi(r)$ при постоянной m — прямая, проходящая через начало (нет гайки — нет момента); измеряем наклон s, а $E = 4mgh/(\pi s R^4)$. Так как $M = mgr$, график $\varphi(r)$ — это график $\varphi(M)$ из задания 1.1 в

другом масштабе оси: каждому сантиметру r отвечает $M = 0{,}096$ Н $\cdot$ $0{,}01$ м $\approx 0{,}96$ мН $\cdot$ м.

r, см	0	2	3	4	5	6	7	8
y, см	4,4	6,8	8,1	9,2	10,3	11,5	12,6	13,7
Δy, см	0	2,4	3,7	4,8	5,9	7,1	8,2	9,3
φ, рад	0	0,094	0,144	0,186	0,227	0,272	0,311	0,350



Зависимость $\varphi(r)$ (1.2): точки — таблица, кресты — $\delta r = 0{,}1$ см, $\delta\varphi = \delta(\Delta y)/l = 0{,}004$ рад; прямая — МНК.

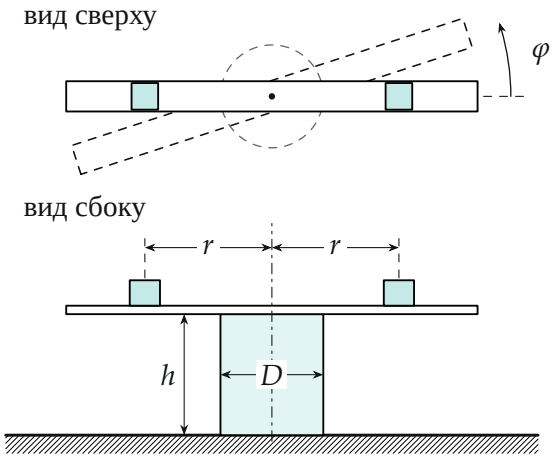
Обработка (1.3). МНК по 8 точкам даёт $s = (4{,}36 \pm 0{,}07)$ м$^{-1}$ и свободный член $(0{,}007 \pm 0{,}004)$ рад — прямая проходит через начало в пределах погрешности, закон Гука выполняется до $\varphi \approx 0{,}35$ рад. Тот же наклон даёт треугольник на графике: $\Delta\varphi/\Delta r = 0{,}175/0{,}04 = 4{,}37$ м$^{-1}$. Отсюда

$$E = \frac{4mgh}{\pi s R^4} = \frac{4 \cdot 9{,}75 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}}{\pi \cdot 4{,}36 \cdot (1{,}45 \cdot 10^{-2})^4} \approx 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ Па} = 22 \text{ кПа}.$$

Жёсткость цилиндра на изгиб $\kappa = E\pi R^4/(4h) \approx 0{,}022$ Н·м/рад.

Обратите внимание: $\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$ и $M \approx mgr$ верны при малых углах. При $\varphi = 0{,}35$ рад $\cos\varphi = 0{,}94$: в последней точке момент завышен на 6 %, в наклоне — примерно на 3 %. Это меньше погрешности опыта, но при $\varphi > 0{,}4$ рад метод нужно поправлять.

Пункт 2. Динамический метод (2.1–2.3). *Установка и методика.* Та же установка, линейка горизонтальна; две одинаковые гайки ставим на одинаковые расстояния r по обе стороны от оси. Отклоняем линейку в горизонтальной плоскости на малый угол и отпускаем — начинаются крутильные колебания. Измеряем время $10T$ десяти колебаний: ошибка старта и остановки секундомера (около 0,1 с) делится на 10 периодов. Для каждого r — пять измерений, значений r — одиннадцать (0–20 см через 2 см).



Крутильный маятник; пунктиром — отклонённое положение.

Обратите внимание: гайки ставим *симметрично*, линейку отклоняем так, чтобы она оставалась горизонтальной. Иначе центр масс уйдёт с оси, возникнут изгибные колебания, и период перестанет описываться крутильной формулой.

Теория. Момент инерции аддитивен: линейка (I_0) и две точечные гайки дают $I = I_0 + 2mr^2$. Подставим в $T = 2\pi\sqrt{I/\chi}$ и возведём в квадрат:

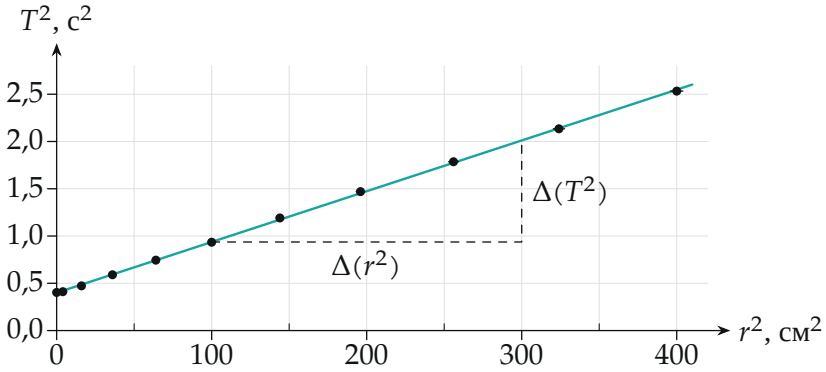
$$T^2 = 4\pi^2\frac{I}{\chi} = \underbrace{\frac{8\pi^2 m}{\chi}}_{a} r^2 + \underbrace{\frac{4\pi^2 I_0}{\chi}}_{b}.$$

Квадрат периода линеен по r^2; наклон a даёт $\chi = 8\pi^2 m/a$, а $E = 6\chi h/(\pi R^4) = 48\pi m h/(aR^4)$. Свободный член $b = T^2(0)$ нужен для

проверки.

r, см	$\langle 10T\rangle$, с	T^2, с^2	r, см	$\langle 10T\rangle$, с	T^2, с^2
0	6,35	0,403	12	10,91	1,191
2	6,41	0,411	14	12,12	1,469
4	6,88	0,473	16	13,36	1,785
6	7,68	0,590	18	14,61	2,135
8	8,63	0,744	20	15,91	2,533
10	9,67	0,935			

Здесь $\langle 10T\rangle$ — среднее из пяти измерений (разброс пяти значений не больше 0,11 с), $T^2 = (\langle 10T\rangle/10)^2$.



Линеаризованный график $T^2(r^2)$ (2.2): кресты $\delta r = 1$ мм, $\delta T = 0{,}01$ с; прямая — МНК.

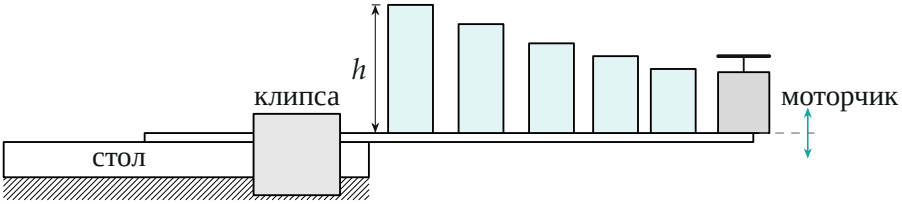
Обработка (2.3). МНК по 11 точкам: $a = (53{,}7 \pm 0{,}3)$ с^2/м^2 ($5{,}37\cdot 10^{-3}$ с^2/см^2 на графике), $b = (0{,}400 \pm 0{,}005)$ с^2; измеренное $T^2(0) = 0{,}403$ с^2 совпадает с b. Далее

$$\chi = \frac{8\pi^2 m}{a} = \frac{8\pi^2 \cdot 9{,}75\cdot 10^{-3}}{53{,}7} \approx 1{,}43\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}},$$

$$E = \frac{6\chi h}{\pi R^4} = \frac{48\pi m h}{a R^4} \approx 2{,}2\cdot 10^4\ \text{Па} = 22\ \text{кПа}.$$

Момент инерции линейки $I_0 = \chi b/(4\pi^2) \approx 1{,}5\cdot10^{-4}$ кг·м^2 — для линейки 30 см (длина и масса в данных не приведены) это $m_0 = 12I_0/l^2 \approx 20$ г, правдоподобно.

Пункт 3. Скорость звука (3.1, 3.2). *Установка и методика.* Линейку с моторчиком закрепляем клипсой на краю стола, конец с мотором выступает не меньше чем на 10 см. На линейке закрепляем цилиндры диаметром $d = 19{,}5$ мм разной высоты h (нож прижимаем к торцу шприца по мере выдавливания). Моторчик с несбалансированной вертушкой трясёт линейку вверх-вниз, цилиндр колеблется вдоль оси. Меняя напряжение (не больше 9,5 В), добиваемся максимальной амплитуды верхнего торца — это резонанс. Частота вращения вертушки равна частоте колебаний; её находим стробоскопом: когда частота вспышек совпадает с частотой вращения, виден один неподвижный винт; несколько неподвижных винтов — вспышки идут на кратной частоте.

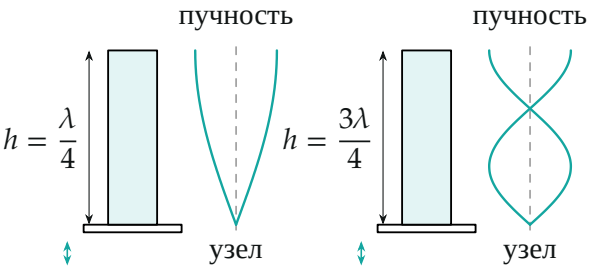


Резонансная установка.

Теория. Нижнее основание приклеено к линейке и колеблется с малой амплитудой — узел смещения; верхний торец свободен — пучность. Между узлом и ближайшей пучностью — четверть волны, поэтому на резонансе

$$h = \frac{\lambda}{4}, \quad c = \lambda\nu_{\text{res}} \;\Rightarrow\; \nu_{\text{res}} = \frac{c}{4}\cdot\frac{1}{h}.$$

Зависимость ν_{res} от $1/h$ — прямая с наклоном $c/4$. Тот же цилиндр резонирует и на нечётных кратных частотах $3\nu_{\text{res}}, 5\nu_{\text{res}}, \ldots$ (по высоте укладывается $3\lambda/4, \ldots$), поэтому берём самую низкую частоту, при которой виден один винт.

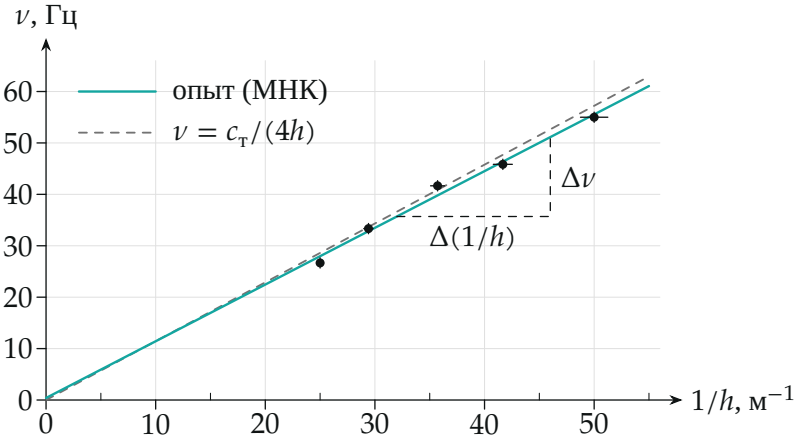


Огибающая амплитуды смещения вдоль цилиндра: основной резонанс (слева) и третья гармоника (справа).

Обратите внимание: речь о четверти волны, а не о половине. Узлы на обоих концах дали бы $h = \lambda/2$ и вдвое большую скорость; здесь закреплён только один конец.

h, см	4,0	3,4	2,8	2,4	2,0
n, об/мин	1600	2000	2500	2750	3300
$\nu_{\text{res}} = n/60$, Гц	26,7	33,3	41,7	45,8	55,0
$1/h$, м$^{-1}$	25,0	29,4	35,7	41,7	50,0

(В таблице организаторов обороты подписаны «об/с»; столбец ν_{res} в с$^{-1}$ показывает, что это об/мин.)



Зависимость $\nu_{res}(1/h)$: кресты $\delta h = 0{,}5$ мм, $\delta\nu = 1$ Гц (оценка); сплошная — МНК, штриховая — теория $\nu = c_m/(4h)$.

Обработка (3.1). МНК по пяти точкам: $c/4 = (1{,}10 \pm 0{,}07)$ м/с, свободный член $(0{,}4 \pm 2{,}7)$ Гц совместим с нулём, как и должно быть для $\nu \propto 1/h$. Отсюда $c_э = (4{,}4 \pm 0{,}3)$ м/с.

Сравнение с теорией (3.2). С $E = 22$ кПа из пп. 1, 2:

$$c_т = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}2 \cdot 10^4}{1{,}05 \cdot 10^3}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 4{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad \delta c_т = \frac{1}{2}\,\frac{\delta E}{E}\,c_т \approx 0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$c_э$ и $c_т$ отличаются на 0,2 м/с, меньше суммарной погрешности 0,4 м/с: измерения согласуются.

Погрешность E**.** Радиус входит в четвёртой степени: при $\delta D = 0{,}5$ мм это $4\delta D/D = 6{,}9\,\%$ (общая для обоих методов); высота $\delta h/h = 2{,}9\,\%$; наклон $\delta s/s = 1{,}6\,\%$ (для динамики $\delta a/a = 0{,}6\,\%$); масса $\delta m/m \approx 1\,\%$. Независимые вклады складываем квадратично: $\delta E/E = \sqrt{6{,}9^2 + 2{,}9^2 + 1{,}6^2 + 1^2}\,\% \approx 7{,}7\,\%$, то есть $\delta E \approx 1{,}7 \approx 2$ кПа. Главный вклад — диаметр: точнее измерять D полезнее, чем взвешивать гайку.

Пункт 4. Желе. Желе ложечкой режется почти без усилия, но куски держат форму и не растекаются, а тарелка при постукивании заметно дрожит. Это $E \approx 22$ кПа при отсутствии текучести: в $E_{ст}/E \approx 10^7$ раз мягче стали, и волна из пункта 3 ($c \approx 4{,}5$ м/с) пересекает 5 см желе за 10–15 мс — такое дрожание ещё видно глазом.

Проверка. Размерность: $E = 4mgh/(\pi s R^4)$ — $\text{кг}\cdot\text{м}^2\text{с}^{-2}/(\text{м}^{-1}\cdot\text{м}^4) = \text{Н}/\text{м}^2$; $E = 48\pi mh/(aR^4)$ — $\text{кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^2\text{м}^{-2}\cdot\text{м}^4) = \text{Па}$. Второй способ: отношение результатов двух методов не содержит массы гайки,

$$\frac{E_{стат}}{E_{дин}} = \frac{ga}{12\pi^2 s} = \frac{9{,}8 \cdot 53{,}7}{12\pi^2 \cdot 4{,}36} = 1{,}02,$$

то есть независимые статика и динамика (22,2 и 21,8 кПа) совпали в пределах 2 %. Предел: для стали по условию $c = 5$ км/с; желатин мягче в $9 \cdot 10^6$ раз и легче в 7,5 раза, $c = 5000/\sqrt{9 \cdot 10^6 \cdot 1{,}05/7{,}9} \approx 4{,}5$ м/с — те же 4,4–4,6 м/с. Три разных опыта — изгиб, кручение, стоячая волна — дали один модуль Юнга желатина, около 22 кПа. **О критериях организаторов.** В критериях оценки названы $E \in [36;44]$ кПа и $c \in [6;7]$

м/с, а в решении и таблицах — 22 кПа и 4,4 м/с. Это не ошибка в 2 раза в формулах: все три формулы (κ, χ, $h = \lambda/4$) проверены выше, а обе пары чисел внутренне согласованы через $c = \sqrt{E/\rho}$: $\sqrt{40 \cdot 10^3/1050} \approx 6{,}2$ м/с попадает в $[6;7]$, $\sqrt{22 \cdot 10^3/1050} \approx 4{,}6$ м/с — в $4{,}4 \pm 0{,}3$. Ошибка в 2 раза (например, обе гайки вместо одной в статике) дала бы 44 кПа в статике, но не изменила бы динамику и резонанс. Значит, критерии написаны для другого, более жёсткого желатина (вероятно, того, что выдали участникам: свойства желатина сильно зависят от концентрации и времени застывания). Разбор следует таблицам решения: по ним $E = 22$ кПа.

Ответ. 1.3) $E = (22 \pm 2)$ кПа (статический метод, $s = (4{,}36 \pm 0{,}07)$ м$^{-1}$); 2.3) $E = (22 \pm 2)$ кПа (динамический метод, $a = (53{,}7 \pm 0{,}3)$ с^2/м^2); 3.1) $c_э = (4{,}4 \pm 0{,}3)$ м/с; 3.2) $c_т = \sqrt{E/\rho} = (4{,}6 \pm 0{,}2)$ м/с — совпадает с $c_э$ в пределах погрешностей.