Магнитное взаимодействие

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 2] «Магнитное взаимодействие».

Простейший электрический диполь представляет собой систему из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных электрических зарядов, смещённых друг относительно друга на вектор $\vec{l}$, проведённый от отрицательного $(-q)$ к положительному заряду $(+q)$. Дипольный момент — это векторная величина, равная $\vec{P} = q\vec{l}$.

Диполь называют точечным (или элементарным), если его размеры малы по сравнению с расстоянием r до диполя: $l \ll r$.

Эксперимент и теория показывают, что картина силовых линий напряжённости $\vec{E}$ поля электрического точечного диполя $\vec{P}$ не отличается от картины силовых линий магнитной индукции $\vec{B}$ магнитного точечного диполя $\vec{P}_m$ (маленького постоянного магнитика или витка с током). Это означает, что, получив законы взаимодействия электрических точечных диполей и заменив в формулах $\vec{P}$ на $\vec{P}_m$, а константу электрического взаимодействия $k_\varepsilon = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф — на константу магнитного взаимодействия $k_\mu = \mu_0/(4\pi) = 10^{-7}$ Гн/м, мы сможем рассчитать поля и законы взаимодействия магнитных диполей. Вектор магнитного момента $\vec{P}_m$ постоянного магнита направлен от южного к северному полюсу (для витка с током это направление соответствует правилу буравчика).

Магнитный шар. Магнитные моменты неодимовых магнитов в нашей работе не меняются под действием внешнего магнитного поля, то есть являются магнитожёсткими. Поле неодимового шара радиусом R на расстояниях $r \geqslant R$ совпадает с полем точечного магнитного диполя $\vec{P}_m$, равного магнитному моменту шара и расположенного в его центре. Неодимовые шары взаимодействуют как жёсткие точечные диполи, расположенные в центрах шаров.

Железный шар в магнитном поле. Железный шар в нашей работе в отсутствие магнитных полей практически не намагничен и, соответственно, не несёт никакого магнитного момента. В магнитном поле он намагничивается, приобретая магнитный момент, пропорциональный

индукции магнитного поля B:

$$\vec{P}_{\text{ш}} = \frac{4\pi}{\mu_0}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\vec{B}R^3,$$

где R — радиус шара, а μ — магнитная проницаемость железа. В результате возникает взаимодействие между наведённым магнитным моментом шара $\vec{P}_{\text{ш}}$ и магнитным моментом $\vec{P}_m$ постоянного магнита.

Задание

1.1. Снимите зависимость силы $F(\theta)$ взаимодействия двух неодимовых шаров от угла θ между их магнитными моментами с шагом в 10° в двух случаях: а) магнитный момент $\vec{P}_m$ одного из шаров (неподвижного) направлен вдоль прямой, соединяющей центры шаров; б) магнитный момент $\vec{P}_m$ одного из шаров (неподвижного) перпендикулярен прямой, соединяющей центры шаров. Опишите установку и методику измерений.

1.2. Постройте зависимости $F_{\text{а}}(\theta)$ и $F_{\text{б}}(\theta)$ на одном графике.

1.3. Постройте график $\gamma(\theta) = F_{\text{а}}(\theta)/F_{\text{б}}(\theta)$.

2. Получите теоретическое значение отношения $\gamma(\theta)$ для значений $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

3. Определите максимальную силу $F_{\text{сц}}$ сцепления соприкасающихся магнитных шаров.

4. Считая, что неодимовые шары намагничены одинаково, используя экспериментальные данные, рассчитайте их магнитные моменты P_m.

5. Определите индукцию $B_{\text{н}}$ магнитного поля на полюсе неодимового шара.

6. Снимите зависимость силы $F(\theta)$ взаимодействия неодимового шара с железным от угла θ между магнитным моментом $\vec{P}_m$ постоянного магнита и линией, соединяющей центры шаров. Постройте график этой зависимости. Определите отношение $k_{\text{э}} = F_{\max}/F_{\min}$ сил взаимодействия на графике 1.2.

Примечание. Диапазон значений силы для этой зависимости может существенно отличаться от уже выбранного масштаба для графика 1.2. В

таком случае вы можете выбрать дополнительную ось ординат (Y), отметив её с правой стороны графика, со своим масштабом и смещением. Укажите, к какой из осей ординат какая зависимость относится.

7. Считая, что железный шар находится в однородном поле, равном внешнему полю в его центре, сделайте теоретическую оценку отношения $k_т = F_{max}/F_{min}$ сил взаимодействия магнита с железным шаром. Сравните теоретическую оценку с экспериментальным значением $k_э$, полученным в предыдущем пункте.
8. Оцените максимальную величину $P_ш$ наведённого магнитного момента железного шара при расстоянии между центрами шаров $r \approx 5$ см.
9. Оцените магнитную проницаемость материала, из которого изготовлен железный шар.

Оборудование. Два одинаковых неодимовых магнитных шара диаметром $d = 20$ мм (один полюс помечен), железный шар диаметром $d = 20$ мм, штатив, устройства для крепления и поворота шаров, шкала для отсчёта угла поворота магнита, электронные весы, деревянная линейка, перманентный маркер по требованию.

▲ **Решение. Что происходит.** Неодимовые шары — точечные магнитные диполи, железный шар — диполь, наводимый полем магнита. Сила между диполями на линии центров убывает как r^{-4}, а при повороте одного из диполей меняется как $\cos\theta$ с множителем 6 или 3 — в зависимости от направления неподвижного диполя. Поэтому отношения сил ($\gamma = 2$ для двух магнитов, $k_т = 4$ для магнита и железа) не зависят от P_m и r и проверяются прямо в опыте, а сами P_m, $B_н$, $P_ш$, μ находят из абсолютных значений сил. Класс задачи — эксперимент с теоретическим предсказанием отношений: сначала форма зависимости, потом числа.

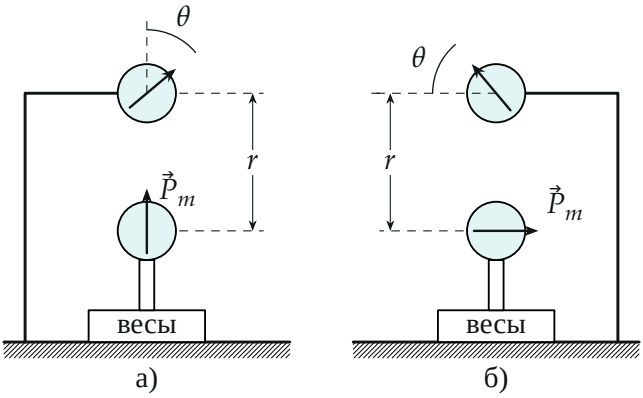
Обозначения. $k = \mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м; P_m — магнитный момент неодимового шара; r — расстояние между центрами; θ — угол поворота верхнего шара, отсчитанный от положения наибольшего притяжения; $F_а = F_\parallel$ и $F_б = F_\perp$ — силы в случаях а) и б); $R = 10$ мм, $d = 2R = 20$ мм; $g = 9{,}8$ м/с^2 (весы показывают массу m, сила $F = mg$; «+» — отталкивание, «−» — притяжение).

Теория: сила между диполями. Магнитные диполи ведут себя как

электрические с заменой $\vec{P} \to \vec{P}_m$, $k_\varepsilon \to k$. Энергия диполя $\vec{P}_2$ в поле диполя $\vec{P}_1$ на расстоянии r вдоль $\hat{r}$ равна $U = k\,[\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - 3(\vec{P}_1 \cdot \hat{r})(\vec{P}_2 \cdot \hat{r})]/r^3$. При повороте верхнего шара вокруг его центра r не меняется; весы измеряют составляющую силы вдоль линии центров, $F = -\partial U/\partial r$ при неизменных направлениях моментов:

$$F = \frac{3k}{r^4}\Big[\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 - 3(\vec{P}_1 \cdot \hat{r})(\vec{P}_2 \cdot \hat{r})\Big].$$

Два нужных случая ($\theta = 0$ — наибольшее притяжение). В случае а) $\vec{P}_1 \parallel \hat{r}$: $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = (\vec{P}_1 \cdot \hat{r})(\vec{P}_2 \cdot \hat{r}) = P_m^2 \cos\theta$, и $F_\text{а} = -6kP_m^2 \cos\theta/r^4$. В случае б) $\vec{P}_1 \perp \hat{r}$: $\vec{P}_1 \cdot \hat{r} = 0$, при $\theta = 0$ моменты антипараллельны, $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = -P_m^2 \cos\theta$, и $F_\text{б} = -3kP_m^2 \cos\theta/r^4$. Обе силы $\propto \cos\theta$ и равны нулю при 90°, 270°.



Схемы опытов: а) $\vec{P}_m$ нижнего шара вдоль линии центров, б) поперёк. Верхний шар повёрнут на θ от положения наибольшего притяжения (опорная линия — пунктир).

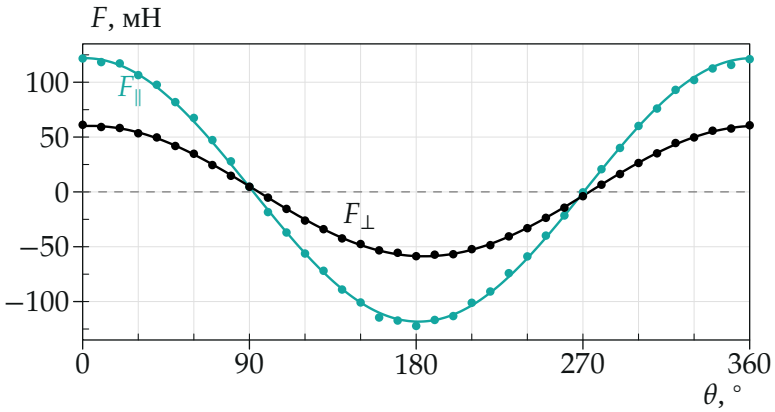
Пункт 1. Силы между неодимовыми шарами (1.1–1.3). *Установка и методика (1.1).* Нижний шар закреплён на подставке на электронных весах, верхний — в держателе штатива (резинкой) центром на оси поворота; шкала даёт угол θ. Весы обнуляем клавишей «TARE», когда шары далеко: вес подставки не мешает, показания — только магнитная сила. Центровку проверяем поворотом держателя на 180°: сила должна

сменить знак. Расстояние r берём таким, чтобы наибольшая сила была около 10 г. В случае а) нижний шар ориентирован моментом вдоль вертикали (линии центров), в случае б) — горизонтально, в плоскости стойки штатива; расстояние то же. Верхний шар ставим так, чтобы нулю шкалы отвечало наибольшее притяжение, и поворачиваем с шагом 10° (нижний неподвижен): снимаем $F_{\parallel}(\theta)$ в случае а) и $F_{\perp}(\theta)$ в случае б).

Результаты при $r = 96$ мм, силы в мН (знаки — как в таблице организаторов: при $\theta = 0$ сила записана положительной, хотя по теории там притяжение; на амплитуды и отношения знак не влияет):

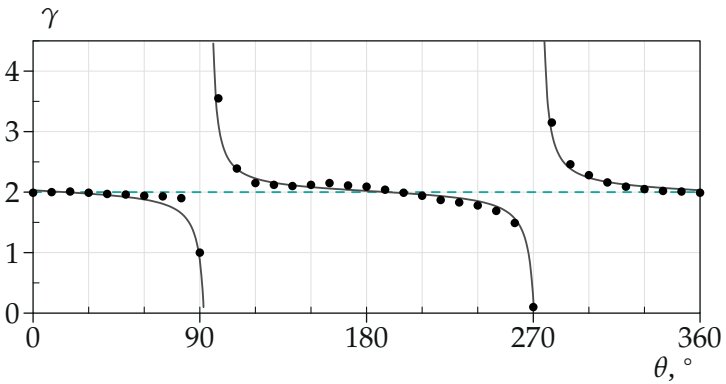
θ, °	$F_{\parallel}$	$F_{\perp}$	θ, °	$F_{\parallel}$	$F_{\perp}$	θ, °	$F_{\parallel}$	$F_{\perp}$
0	121,7	61,2	130	−71,9	−34,0	250	−39,8	−23,6
10	118,4	59,2	140	−89,0	−42,4	260	−21,5	−14,4
20	117,2	58,3	150	−100,8	−47,5	270	−0,4	−3,9
30	106,5	53,5	160	−114,5	−53,3	280	20,7	6,6
40	97,7	49,7	170	−117,3	−55,5	290	40,1	16,3
50	81,9	41,9	180	−122,2	−58,6	300	60,2	26,4
60	67,5	34,8	190	−116,7	−57,2	310	76,0	35,2
70	47,3	24,5	200	−113,2	−56,8	320	93,1	44,6
80	27,9	14,7	210	−101,1	−52,2	330	102,0	49,7
90	4,7	4,7	220	−90,8	−48,5	340	112,6	55,8
100	−18,4	−5,2	230	−74,1	−40,5	350	115,8	57,8
110	−37,0	−15,5	240	−58,8	−33,1	360	121,1	60,8
120	−56,2	−26,1						

Графики (1.2, 1.3). $F_{\parallel}(\theta)$ и $F_{\perp}(\theta)$ строим на одном графике, $\gamma(\theta) = F_{\parallel}/F_{\perp}$ — на втором.



$F_\parallel(\theta)$ и $F_\perp(\theta)$ при $r = 96$ мм: точки — таблица, кривые — МНК $F = c + F_0\cos(\theta - \delta)$.

Обе зависимости — косинусоиды: $F_\parallel = 1{,}9 + 120{,}1\cos(\theta - 1{,}3°)$, $F_\perp = 0{,}8 + 59{,}4\cos(\theta - 4{,}2°)$ мН (МНК по 37 точкам). Постоянные 1–2 мН — остаточный сдвиг нуля весов, углы 1–4° — неточность нуля шкалы. Амплитуды относятся как $120{,}1/59{,}4 = 2{,}02$.

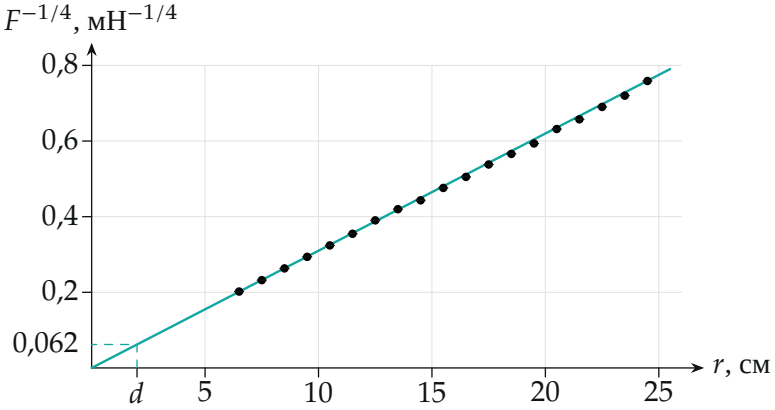


Отношение $\gamma(\theta)$: точки — таблица, штриховая — теория $\gamma = 2$, тонкая кривая — отношение двух подгонок.

Обратите внимание: γ нельзя читать у нулей сил. Нули подгонок лежат при 92° и 94° (270° и 273°), и между ними отношение малых величин бросается от 0 до ∞: точки 1,00 и 0,10 — арифметика с малыми числами. В остальной области $\gamma = 1{,}9$–$2{,}1$.

Пункт 2. Теоретическое γ. Из формул а) и б) $\gamma = \dfrac{6kP_m^2 \cos\theta / r^4}{3kP_m^2 \cos\theta / r^4} = 2$. При 0° и 180° отношение равно 2 (опыт: 121,7/61,2 = 1,99 и 2,09; по амплитудам подгонок 2,02). При 90° и 270° обе силы равны нулю, отношение 0/0 в опыте не определено; так как обе силы $\propto \cos\theta$, по непрерывности $\gamma = 2$ и там. Теория подтверждена в пределах 5 %.

Пункт 3. Сила сцепления. Снимаем $F(r)$ в положении наибольшего притяжения при r = 6,5–24,5 см. Так как $F \propto r^{-4}$, величина $F^{-1/4}$ линейна по r и проходит через начало: $F^{-1/4} = k_ш r$. Силу сцепления — силу при касании, то есть при расстоянии между центрами $r = d$, — измерить прямо нельзя (десятки ньютонов, весы столько не покажут), поэтому экстраполируем прямую.



Зависимость $F^{-1/4}(r)$ (точки считаны с графика организаторов): прямая $F^{-1/4} = k_ш r$; пунктир — экстраполяция до $r = d$.

Наклон $k_ш = (3{,}10 \pm 0{,}15)$ мН$^{-1/4}$·м (по считанным точкам МНК даёт 3,07). При $r = d = 0{,}020$ м

$$F_{сц} = (k_ш d)^{-4} = \frac{1}{(3{,}10 \cdot 0{,}020)^4} \text{ мН} \approx 6{,}8 \cdot 10^4 \text{ мН} \approx 68 \text{ Н}.$$

Погрешность: $\delta F/F = 4\,\delta k_ш / k_ш = 19$ %, то есть $\delta F \approx 13$ Н. Организаторы дают 69 ± 15 Н — совпадение в пределах погрешности.

Пункт 4. Магнитный момент. При моментах вдоль линии центров $F^{\max} = 6kP_m^2/r^4$, откуда $P_m = \sqrt{F^{\max} r^4/(6k)}$. Подставим $F^{\max} = F_{\parallel}(0) = 121{,}7$ мН при $r = 96$ мм:

$$P_m = \sqrt{\frac{0{,}1217 \cdot (0{,}096)^4}{6 \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{17{,}2}\ \text{А} \cdot \text{м}^2 \approx 4{,}15\ \text{Дж/Тл}.$$

Второй способ — по силе сцепления при $r = d$: $P_m = \sqrt{F_{\text{сц}} d^4/(6k)} = 4{,}26$ Дж/Тл (расхождение 3 %). В решении организаторов формула для P_m напечатана с $(d/2)^4$ и $6\mu_0/4$ — это опечатка: при соприкосновении шаров между центрами d, а не $d/2$, и по ней вышло бы 0,6 Дж/Тл, а не их же 4,15. Погрешность $\delta P_m/P_m = \frac{1}{2}(\delta F/F + 4\,\delta r/r) \approx 3\,\%$ при $\delta F/F = 1\,\%$ и $\delta r = 1$ мм; с запасом $P_m = (4{,}2 \pm 0{,}2)$ Дж/Тл.

Пункт 5. Индукция на полюсе. Поле диполя на оси $B = 2kP_m/r^3$; на полюсе $r = R$:

$$B_{\text{н}} = \frac{2kP_m}{R^3} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}15}{(0{,}010)^3}\ \text{Тл} \approx 0{,}83\ \text{Тл}.$$

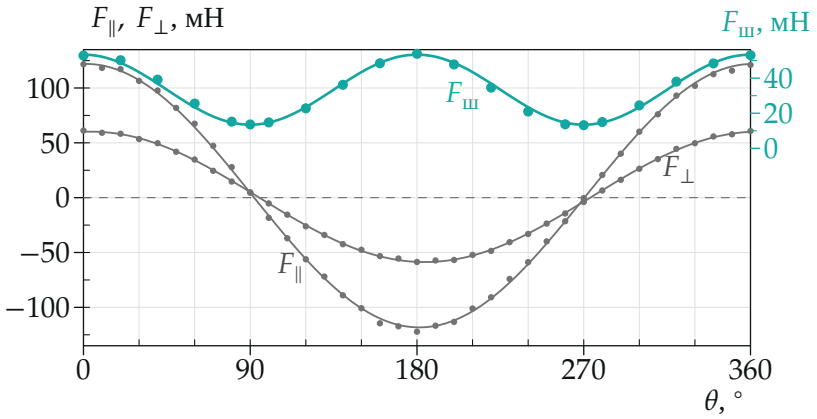
Проверка по намагниченности: $M = P_m/V = 9{,}9 \cdot 10^5$ А/м, $\mu_0 M \approx 1{,}24$ Тл — типичная остаточная индукция неодимового магнита (1,2–1,4 Тл, справочно); у равномерно намагниченного шара $B_{\text{н}} = \frac{2}{3}\mu_0 M = 0{,}83$ Тл — то же.

Пункт 6. Неодимовый и железный шары. Железный шар на весах, неодимовый сверху, весы обнуляем «TARE», $r_0 = 46$ мм (наибольшая сила около 5 г). θ — угол между $\vec{P}_m$ и линией центров ($\theta = 0$ — момент

направлен вдоль линии центров). Результаты, мН:

θ, °	$F_ш$	θ, °	$F_ш$	θ, °	$F_ш$
0	52,9	120	22,8	260	13,7
20	50,2	140	36,2	270	13,2
40	39,2	160	48,5	280	15,0
60	25,5	180	53,9	300	24,5
80	15,2	200	47,8	320	38,0
90	13,6	220	34,6	340	48,4
100	14,8	240	21,0	360	53,1

Силы $F_ш$ (13–54 мН) заметно меньше $F_\parallel$, поэтому для них введена правая ось ординат со своим масштабом и смещением (ноль правой оси — на уровне 45 мН левой, цена деления в 1,6 раза крупнее).



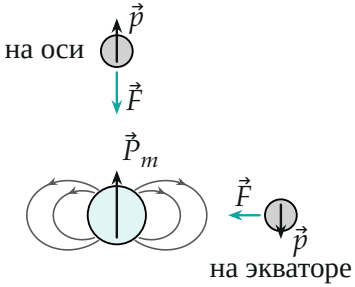
Левая ось — $F_\parallel$, $F_\perp$ (серые кривые), правая ось — $F_ш$ (бирюзовая кривая).

Период $F_ш(\theta)$ вдвое меньше 360°: максимумы при 0° и 180°, минимумы при 90°, 270°. Максимум 53,1 мН (0°), 53,9 мН (180°); минимум 13,6 мН (90°), 13,2 мН (270°):

$$k_э = \frac{F_{max}}{F_{min}} = \frac{53{,}1}{13{,}2} = 4{,}02,$$

подгонка $F_ш = A + B\cos 2\theta$ даёт $A = 33{,}4$, $B = 20{,}0$ мН и $(A+B)/(A-B) = 3{,}96$. Итого $k_э = 4{,}0 \pm 0{,}2$.

Пункт 7. Теория: $k_т$. Железный шар в поле магнита, равном внешнему полю в его центре, приобретает момент $\vec{p} = \alpha\vec{B}$ вдоль $\vec{B}$. Поле диполя под углом θ к $\vec{P}_m$: вдоль $\hat{r}$ равно $2kP_m\cos\theta/r^3$, поперёк — $kP_m\sin\theta/r^3$; на оси $B = 2kP_m/r^3$ вдоль $\vec{P}_m$, на экваторе $B = kP_m/r^3$ против $\vec{P}_m$ (рис.).



Наведённый момент $\vec{p}$ направлен вдоль $\vec{B}$; сила $\vec{F}$ направлена к магниту.

Отсюда $B^2 = k^2P_m^2(1 + 3\cos^2\theta)/r^6$. Сила на наведённый диполь $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{B} = \alpha(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{\alpha}{2}\nabla B^2$ (вне источников $\operatorname{rot}\vec{B} = 0$). Составляющая вдоль линии центров, которую измеряют весы, — производная по r при неизменном θ:

$$F_ш = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial B^2}{\partial r} = -\frac{3\alpha k^2P_m^2}{r^7}(1 + 3\cos^2\theta).$$

Знак «−» — притяжение при любом θ. Наибольшая сила при $\theta = 0$ (множитель 4), наименьшая при 90° (множитель 1): $k_т = F_{max}/F_{min} = 4$, что согласуется с $k_э = 4{,}0 \pm 0{,}2$. Выражение $1 + 3\cos^2\theta = (5 + 3\cos 2\theta)/2$ объясняет и половинный период: $B/A = 3/5 = 0{,}60$, из подгонки $20{,}0/33{,}4 = 0{,}60$.

Обратите внимание: сила на железный шар пропорциональна B^2 (момент $\propto B$ и сила $\propto$ градиенту), поэтому она не меняет знака, зависит от r как r^{-7} (а не r^{-4}) и от угла — как $\cos 2\theta$.

Пункт 8. Наведённый момент. При $\theta = 0$ момент $\vec{P}_ш$ коллинеарен $\vec{P}_m$ и вдоль линии центров, значит $F_{max} = 6kP_mP_ш/r_0^4$:

$$P_ш = \frac{F_{max}r_0^4}{6kP_m} = \frac{0{,}0531\cdot(0{,}046)^4}{6\cdot10^{-7}\cdot4{,}15} \approx 0{,}096\ \text{А}\cdot\text{м}^2.$$

Итак, $P_ш \approx 0{,}1$ Дж/Тл, то есть $0{,}023\,P_m$. Второй способ: два магнита притягиваются с той же силой 53 мН при $r = 11{,}5$ см (измерено); из $P_m P_ш / r_0^4 = P_m^2 / r^4$ получаем $P_ш / P_m = (4{,}6/11{,}5)^4 = 0{,}026$ — то же.

Пункт 9. Магнитная проницаемость. Подставим $B = 2kP_m / r_0^3$ в формулу условия:

$$P_ш = \frac{4\pi}{\mu_0}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,BR^3 = \frac{\mu-1}{\mu+2}\cdot 2P_m\Big(\frac{R}{r_0}\Big)^3.$$

Числа: $2P_m(R/r_0)^3 = 2\cdot 4{,}15\cdot(0{,}217)^3 \approx 0{,}085$ Дж/Тл. Из пункта 8 $P_ш \approx 0{,}096$, значит $\dfrac{\mu-1}{\mu+2} \approx 1{,}1$. Дробь не больше 1 (при $\mu \to \infty$); превышение — в пределах погрешности (при $\delta r_0 = 1$ мм множитель r_0^4 даёт $\approx 9\,\%$, плюс неоднородность поля на шаре: $r_0/R = 4{,}6$). Опыт даёт нижнюю оценку: при $\dfrac{\mu-1}{\mu+2} \geqslant 0{,}9$ получаем $\mu \geqslant 28$, то есть $\mu \gg 1$; точнее μ не найти — при больших μ дробь почти не меняется.

Проверка. Размерность: $[kP_m^2/r^4] = \text{Гн}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{А}^2\text{м}^4/\text{м}^4 = \text{Дж/м} = \text{Н}$; $[2kP_m/R^3] = \text{Гн}\cdot\text{А/м}^2 = \text{Вб/м}^2 = \text{Тл}$. Второй способ: P_m (4,15 и 4,26) и $P_ш$ (0,096 и $0{,}026P_m$) найдены двумя способами, значения совпали; отношения сил 2,02 и 4,0 — как у диполей. Смысл: неодимовый шар — магнит с моментом около 4 А·м^2 и полем у полюса около 0,8 Тл, а железный шар в его поле намагничивается слабо ($P_ш \approx 2\,\%$ от P_m) — наведённый момент ограничен геометрией, $2P_m(R/r_0)^3$.

Ответ. 1) $F_\parallel(\theta)$ и $F_\perp(\theta)$ — косинусоиды с амплитудами ≈ 120 и ≈ 60 мН при $r = 96$ мм, $\gamma(\theta) \approx 2{,}0$ вдали от нулей сил; 2) $\gamma = 2$ при $\theta = 0°, 180°$ (при $90°, 270°$ — 0/0, по непрерывности тоже 2); 3) $F_{сц} \approx 68 \pm 13$ Н; 4) $P_m \approx 4{,}15$ Дж/Тл; 5) $B_н \approx 0{,}83$ Тл; 6) $k_э = 4{,}0 \pm 0{,}2$; 7) $k_т = 4$; 8) $P_ш \approx 0{,}1$ Дж/Тл ($\approx 0{,}02P_m$); 9) $\mu \gg 1$ ($\mu \gtrsim 30$).