Слинки

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, 11 класс, задача 1] «Слинки». Пружину «слинки» удерживают за верхний виток так, что её нижний виток находится на высоте $h = 1$ м над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 1{,}5$ м. Пружину отпускают. Через какое время τ она упадёт на пол? В нерастянутом состоянии витки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться. Ответ дать с точностью 0,02 с.



Рис. 11.1. Пружина «слинки», подвешенная за верхний виток.

▲ **Решение. Что происходит.** После отпускания на пружину действует только сила тяжести: рука убрана, пола пружина ещё не касается. Поэтому *центр масс* пружины падает как свободное тело, хотя сама пружина ведёт себя сложно: нижний виток остаётся на месте, пока до него не дойдёт схлопывающаяся сверху часть. Упругие силы между витками и силы ударов при схлопывании внутренние, на движение центра масс они не влияют. Главная идея — теорема о движении центра масс; остаётся

узнать, с какой высоты центр масс начинает падать. Он ниже середины пружины: внизу витки прижаты друг к другу, наверху растянуты, и найти его высоту нужно из равновесия растянутой пружины.

Обозначения. $N \gg 1$ — число витков, m — масса одного витка, k — жёсткость одного витка (как пружины), $M = Nm$ — масса пружины. Витки нумеруем снизу: $i = 1, \dots, N$. Ось x направлена вверх, $x = 0$ — нижний виток, x_i — высота i-го витка над нижним; $x_N = l$. Высота над полом — y, h_c — высота центра масс над нижним витком в висящей пружине.

1. Центр масс падает свободно. Запишем теорему о движении центра масс пружины в проекции на вертикальную ось: $Ma_c = -Mg$, то есть $a_c = -g$ — при условии, что внешняя сила одна, сила тяжести. Это верно от момента, когда пружину отпустили, до касания пола. Центр масс движется как тело, отпущенное без начальной скорости:

$$y_c(t) = y_c(0) - \frac{gt^2}{2}.$$

В начале $y_c(0) = h + h_c$. К моменту падения пружина схлопнулась и лежит на полу, витки тонкие, а её длина $l_0 = 6$ см мала: центр масс почти на полу, $y_c \approx 0$ (поправку на l_0 найдём в пункте 6). Значит, центр масс пролетает расстояние $H = h + h_c$:

$$H = \frac{g\tau^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2(h + h_c)}{g}}.$$

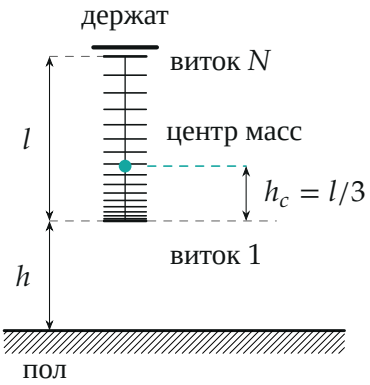
Неизвестным осталось только h_c.

2. Растяжение витков. Рассмотрим i-й виток и всё, что висит ниже него: $i - 1$ витков массой $(i - 1)m$. Эта часть пружины неподвижна, значит, сила упругости i-го витка уравновешивает её вес (условие равновесия для части пружины ниже i-го витка):

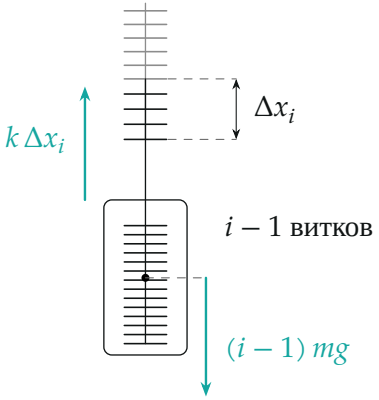
$$k\,\Delta x_i = (i - 1)\,mg,$$

где Δx_i — удлинение i-го витка. Чем выше виток, тем больше груза он

держит и тем сильнее растянут: нижние витки почти не растянуты, верхние растянуты сильнее всех.



Висящая пружина (схема, число витков уменьшено). Витки внизу прижаты друг к другу, вверху разведены; центр масс на высоте h_c над нижним витком.



Нижняя часть пружины: на неё действуют вес $(i-1)mg$ и сила упругости $k\Delta x_i$ растянутого i-го витка. Рисунок схематичный.

3. Высота i-го витка и длина пружины. Высота i-го витка над нижним равна сумме удлинений витков от первого до i-го:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta x_j = \frac{mg}{k} \sum_{j=1}^{i} (j-1) = \frac{mg}{2k}\, i(i-1).$$

Длина всей пружины — высота верхнего витка:

$$l = x_N = \frac{mg}{2k} N(N-1) \approx \frac{mgN^2}{2k}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{mg}{k} \approx \frac{2l}{N^2}$$

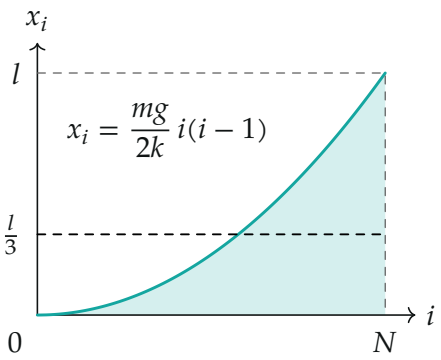
(при $N \gg 1$ можно считать $N - 1 \approx N$). Тогда $x_i \approx l\,(i/N)^2$: высота витка растёт как квадрат номера, и ни k, ни m, ни N в дальнейшем не понадобятся.

4. Центр масс. Массы витков одинаковы, поэтому высота центра масс — среднее арифметическое x_i:

$$h_c = \frac{1}{Nm} \sum_{i=1}^{N} m\,x_i = \frac{1}{N} \cdot \frac{mg}{2k} \sum_{i=1}^{N} i(i-1) = \frac{mg}{2kN} \cdot \frac{N^3 - N}{3} \approx \frac{mgN^2}{6k} = \frac{l}{3}.$$

Здесь использовано $\sum_{i=1}^{N} i(i-1) = \dfrac{N^3 - N}{3}$ и $N \gg 1$.

Второй способ — геометрический. Среднее значение $x_i \approx l\,(i/N)^2$ по виткам равно $l \int_0^1 s^2\,ds = l/3$: площадь под параболой составляет треть площади квадрата $l \times 1$ (рисунок).



Высота витка x_i в зависимости от номера: парабола. Средняя высота (штриховая линия) равна $l/3$.

Обратите внимание: центр масс лежит не на середине длины пружины, а на трети. Массы витков одинаковы, но по длине они распределены

неравномерно: внизу витки сидят гуще, поэтому центр масс опускается к нижнему витку.

5. Время падения. Высота, с которой падает центр масс, $H = h + l/3 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ м. Тогда

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\,(h + l/3)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5}{9{,}8}} \approx 0{,}553 \text{ с}.$$

6. Поправка на l_0. Учтём, что у пружины есть собственная длина l_0. Каждый виток в нерастянутом состоянии занимает l_0/N, поэтому высота i-го витка складывается из нерастянутой доли $(i-1)\,l_0/N$ и растяжения. Средняя высота по виткам — центр масс — равна $l_0/2$ для нерастянутой части и $(l - l_0)/3$ для растяжения:

$$h_c = \frac{l_0}{2} + \frac{l - l_0}{3} = \frac{l}{3} + \frac{l_0}{6}.$$

В конце схлопнутая пружина лежит на полу, её центр масс на высоте $l_0/2$. Центр масс опускается на

$$H' = h + h_c - \frac{l_0}{2} = h + \frac{l}{3} - \frac{l_0}{3} = 1{,}48 \text{ м}, \qquad \tau' = \sqrt{\frac{2H'}{g}} \approx 0{,}550 \text{ с}.$$

Поправка около 0,003 с, меньше требуемой точности 0,02 с: $\tau \approx 0{,}55$ с.

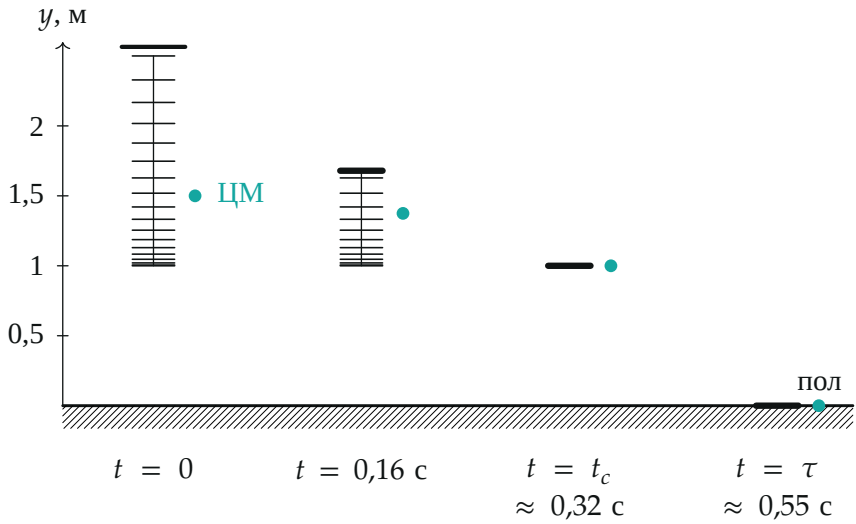
Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Предел: при $l \to 0$ получаем $\tau = \sqrt{2h/g}$, то есть падение тела с высоты h.

Второй способ — по стадиям, он заодно проверяет условие «успевает схлопнуться». Пока схлопывание не дошло до нижнего витка, он висит на месте. Когда пружина схлопнулась целиком, весь материал собран на высоте нижнего витка h, и центр масс опустился на $l/3$:

$$\frac{gt_c^2}{2} = \frac{l}{3} \quad \Rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \approx 0{,}32 \text{ с}.$$

Весь импульс системы Mgt_c приходится на сгусток, его скорость $v_c = gt_c \approx 3{,}13$ м/с. Дальше сгусток проходит высоту h с этой начальной ско-

ростью: $h = v_c u + gu^2/2$, откуда $u \approx 0{,}234$ с и $\tau = t_c + u \approx 0{,}553$ с — как в пункте 5. Так как $t_c < \tau$, пружина действительно успевает схлопнуться до падения.

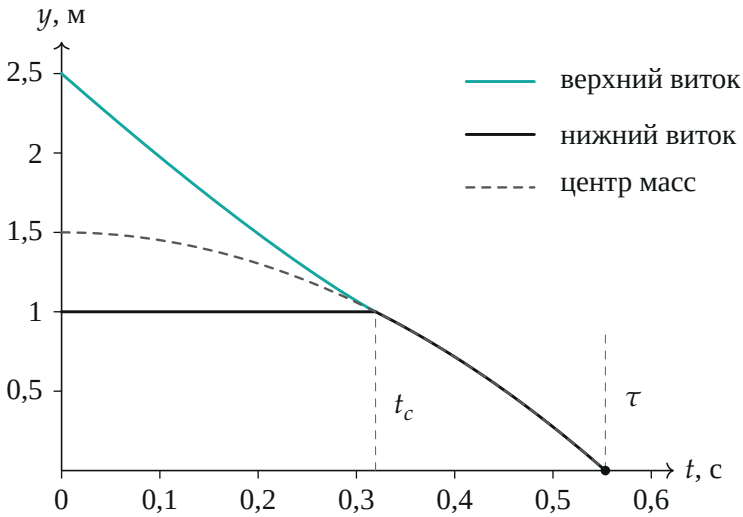


Кадры падения: $t = 0$, середина схлопывания, конец схлопывания, момент падения. Витки показаны чёрточками, сгусток — жирной чертой, центр масс — точкой. Нижний виток стоит до t_c, центр масс падает всё время с ускорением g.

Положение верха пружины на рисунках и на графике найдено так. Пусть схлопывание дошло до высоты $x_f = ls^2$ над нижним витком ($0 \le s \le 1$): витки ниже неподвижны, доля $1 - s$ витков собрана в сгусток на высоте x_f. Центр масс такой системы лежит на высоте

$$y_c = h + s \cdot \frac{ls^2}{3} + (1 - s)\, ls^2 = h + l\left(s^2 - \frac{2}{3}s^3\right),$$

а по теореме о движении центра масс $y_c = h + \dfrac{l}{3} - \dfrac{gt^2}{2}$. Приравнивая, получаем $s(t)$ и высоту верха $h + ls^2$.



Высота верхнего витка, нижнего витка и центра масс. После t_c вся пружина — один сгусток, и три кривые совпадают.

Смысл: центр масс подчиняется простому закону, даже когда части пружины движутся по-разному, и это заменило разбор схлопывания виток за витком.

Ответ. $\tau = \sqrt{\dfrac{2\,(h + l/3)}{g}} \approx 0{,}55$ с; поправка на l_0 около 0,003 с (меньше 0,02 с).