# Я тучка, тучка, тучка...

**Задача 2.** [ВсОШ 2016/17, 11 класс, задача 2] «Я тучка, тучка, тучка...». В приближении адиабатической атмосферы оцените:

1. высоту $H$ атмосферы Земли;
2. высоту $h_0$ нижней кромки облаков.

Температура на поверхности Земли $t_0 = 27\,^\circ\text{C}$, а относительная влажность воздуха $\varphi = 80\%$. Считайте, что $h_0 \ll H$.

*Указание:* адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, всё время остаются в механическом равновесии.

*Таблица 11.1.* Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры:

| $t$, °C | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_\text{н}$, мм рт. ст. | 7,01 | 8,05 | 9,21 | 10,5 | 12,0 | 13,6 | 15,5 |

| $t$, °C | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_\text{н}$, мм рт. ст. | 17,5 | 19,8 | 22,4 | 25,2 | 28,4 | 31,8 |

*Примечание:* воздух считать идеальным двухатомным газом с молярной массой $\mu = 29$ г/моль.

▲ **Решение. Что происходит.** В адиабатической атмосфере порция воздуха, которую подняли вверх, оказывается в области меньшего давления, расширяется без теплообмена, совершает работу и остывает. Поэтому температура с высотой падает по линейному закону, и из него находится оценка высоты $H$: высота, на которой температура дошла бы до нуля. Облака появляются, когда поднявшийся воздух остыл настолько, что водяной пар в нём стал насыщенным. Класс задачи — насыщенный пар: пар ненасыщенный, пока давление не дошло до $P_\text{н}$; ищем высоту, где дошло.

**Обозначения.** $z$ — высота над поверхностью Земли, $T_0 = 300$ К — температура у поверхности, $\mu = 29$ г/моль — молярная масса воздуха, $c_p = \frac{7}{2}R$ — молярная теплоёмкость двухатомного газа при постоянном

давлении, $P_н(T)$ — давление насыщенного пара (таблица), $P(z)$ — парциальное давление пара на высоте $z$.

**1. Как меняется температура с высотой.** Возьмём один моль воздуха и поднимем его на малую высоту $dz$ (рисунок). Теплообмена нет, поэтому закон сохранения энергии для порции записывается так: работа внешнего давления над порцией, $P_1V_1 - P_2V_2$, идёт на изменение внутренней энергии и на рост потенциальной энергии $\mu g\,(z_2 - z_1)$:

$$P_1V_1 - P_2V_2 = U_2 - U_1 + \mu g\,(z_2 - z_1).$$

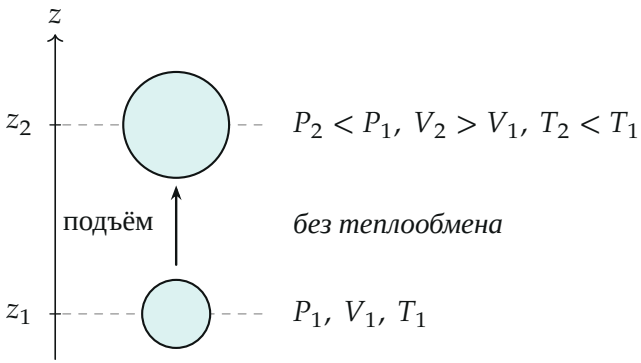
Перенесём $PV$ к внутренней энергии: $(U+PV)_2-(U+PV)_1 = -\mu g\,\Delta z$. Для моля идеального газа $U + PV = c_pT$, поэтому

$$c_p\,\Delta T = -\mu g\,\Delta z \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g}{c_p} = -\frac{2\mu g}{7R}.$$

Градиент один и тот же на любой высоте, значит, температура убывает линейно:

$$T(z) = T_0 - \frac{2\mu g}{7R}\,z = T_0 - \Gamma z, \qquad \Gamma = \frac{2\mu g}{7R}.$$

Численно $\Gamma = \dfrac{2\cdot 0{,}029\cdot 9{,}8}{7\cdot 8{,}31} \approx 9{,}8\cdot 10^{-3}$ К/м, то есть 9,8 К на километр подъёма. Знак: температура с высотой падает — расширяющийся воздух остывает.



*Порция воздуха при подъёме: давление падает, объём растёт, температура падает; теплообмена нет.*

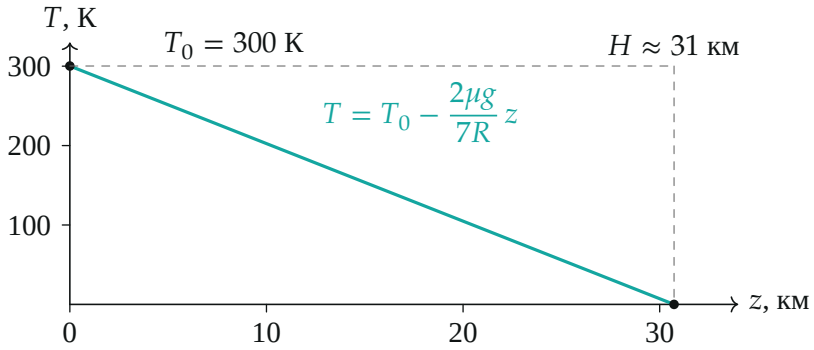
Второй способ — через адиабату ($\gamma = 7/5$). Для порции $P^{(1-\gamma)/\gamma}\,T = \text{const}$, откуда $dP/P = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\,dT/T = \frac{7}{2}\,dT/T$. Механическое равновесие порции с окружающим воздухом даёт гидростатику:

$$dP = -\rho g\,dz = -\frac{P\mu g}{RT}\,dz \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2}\,dT = -\frac{\mu g}{R}\,dz,$$

тот же градиент.

**2. Высота атмосферы.** Температура не может быть ниже нуля. Оценим высоту атмосферы по высоте, на которой линейный закон даёт $T = 0$ (там же, как показывает адиабата, обращается в нуль и давление):

$$H \approx \frac{T_0}{\Gamma} = \frac{7RT_0}{2\mu g} = \frac{7 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{2 \cdot 0{,}029 \cdot 9{,}8}\ \text{м} \approx 31\ \text{км} \approx 30\ \text{км}.$$




*Температура в адиабатической атмосфере: прямая, доходящая до нуля на высоте $H$.*

**3. Давление пара на небольших высотах.** Поднимающаяся порция воздуха уносит свой пар, доля пара в ней не меняется, а значит, парциальное давление пара пропорционально давлению воздуха: $P(z)/P(0) = P_{\text{возд}}(z)/P_{\text{возд}}(0)$. Давление воздуха на высоте $z$ найдём

из адиабаты $P \sim T^{7/2}$:

$$\frac{P_{\text{возд}}(z)}{P_{\text{возд}}(0)} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{7/2} = \left(1 - \frac{\Gamma z}{T_0}\right)^{7/2} \approx 1 - \frac{7}{2}\frac{\Gamma z}{T_0} = 1 - \frac{\mu g z}{R T_0}$$

(при $h_0 \ll H$ малая добавка $\Gamma z/T_0 \ll 1$; использовано $\frac{7}{2}\Gamma = \mu g/R$). Парциальное давление пара у поверхности равно $\varphi P_{\text{н}}(T_0)$, поэтому

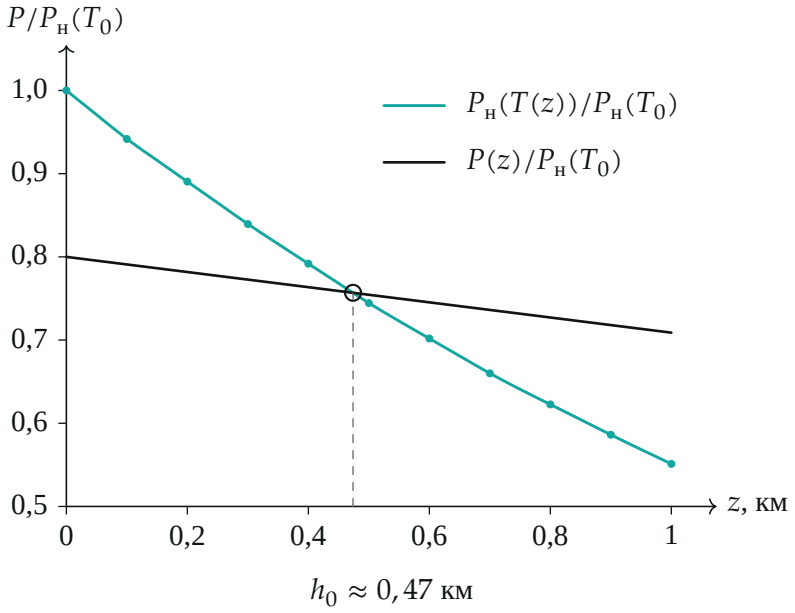
$$\frac{P(z)}{P_{\text{н}}(T_0)} \approx \varphi\left(1 - \frac{\mu g z}{R T_0}\right) = 0{,}8\,(1 - 0{,}114\,z),$$

где $z$ в километрах: $\dfrac{\mu g}{R T_0} = \dfrac{0{,}029 \cdot 9{,}8}{8{,}31 \cdot 300} = 1{,}14 \cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$. Давление пара убывает с высотой по почти прямой.

**4. Нижняя кромка облаков.** Давление насыщенного пара $P_{\text{н}}(T(z))$ падает с высотой быстрее, чем $P(z)$, потому что температура убывает, а $P_{\text{н}}$ быстро растёт с температурой. Облако начинается там, где пар становится насыщенным: $P(z) = P_{\text{н}}(T(z))$. Поделим обе части на $P_{\text{н}}(T_0)$. Давление насыщенного пара при 27 °C возьмём по таблице как среднее значений при 26 и 28 °C: $P_{\text{н}}(T_0) = 26{,}8$ мм рт. ст. Температуру на высоте $z$ берём из пункта 1 ($t = 27 - 9{,}8\,z$ в °C, $z$ в километрах), $P_{\text{н}}$ — линейной интерполяцией таблицы:

| $z$, км | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$, °C | 27,0 | 25,0 | 23,1 | 22,1 | 21,1 | 19,2 | 17,2 |
| $\pi_{\text{н}}$ | 1,000 | 0,890 | 0,792 | 0,744 | 0,702 | 0,623 | 0,551 |
| $\pi$ | 0,800 | 0,782 | 0,764 | 0,754 | 0,745 | 0,727 | 0,709 |

Обозначим $\pi_{\text{н}} = P_{\text{н}}(T(z))/P_{\text{н}}(T_0)$ и $\pi = P(z)/P_{\text{н}}(T_0)$. Построим обе зависимости на одном графике; абсцисса точки пересечения — искомая высота.




*Давление насыщенного пара (точки по таблице, ломаная) и давление пара в воздухе (прямая). Пересечение — нижняя кромка облаков.*

Между $z = 0{,}4$ км (насыщенный пар выше на 0,028) и $z = 0{,}5$ км (ниже на 0,010) разность меняет знак. Линейная интерполяция даёт

$$h_0 \approx 0{,}4 + 0{,}1 \cdot \frac{0{,}028}{0{,}028 + 0{,}010} \approx 0{,}47 \text{ км} \approx 0{,}5 \text{ км}.$$

**5. Проверка приближений.** На высоте $h_0$ давление пара уменьшилось на $0{,}114 \cdot 0{,}47 \approx 5\%$ от поверхностного, температура — на $\Gamma h_0/T_0 \approx 1{,}5\%$. Эти изменения малы: условие $h_0 \ll H$ (0,5 ≪ 31 км) выполнено, линеаризация пункта 3 допустима. Точная формула $(1 - \Gamma z/T_0)^{7/2}$ даёт 0,472 км.

Обратите внимание: парциальное давление пара падает вместе с давлением воздуха, потому что доля пара в порции не меняется. Если считать пар отдельным газом со своей плотностью $\rho_п = P_н \mu_в/(RT_0)$ ($\mu_в = 18$ г/моль), получится $h_0 \approx 0{,}43$ км — так считают организаторы. Но такое распределение пара было бы у неподвижного пара в равновесии «самого по себе», а в адиабатической атмосфере порции воздуха пере-

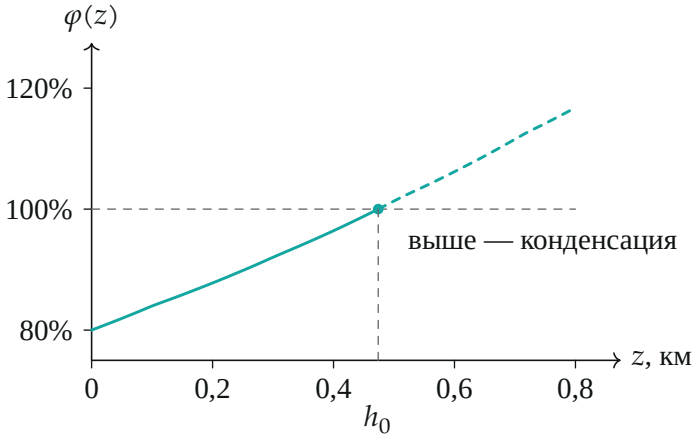
мешиваются по вертикали и несут пар с собой, поэтому верна наша модель: 0,47 км. Оба значения лежат в промежутке 0,4–0,5 км, который принимают критерии.

**Проверка.** Размерность $\Gamma = \mu g/R$: $\dfrac{\text{кг/моль} \cdot \text{м/с}^2}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}} = \text{К/м}$. Значение 9,8 К/км — сухоадиабатический градиент, известный по метеорологии.

Второй способ найти $h_0$ — по точке росы. Давление пара у поверхности $0{,}8 \cdot 26{,}8 = 21{,}4$ мм рт. ст.; по таблице это давление насыщенного пара при $t_d \approx 23{,}3\ ^\circ\text{C}$. Порция остывает на 9,8 К на километр, а точка росы за счёт падения давления пара снижается примерно на 1,9 К/км ($dt_d/dP \approx 0{,}77$ К/(мм рт. ст.), $dP/dz = -0{,}114 \cdot 21{,}4$ мм рт. ст./км). Температура порции сравняется с точкой росы там, где

$$27 - 9{,}8\,h_0 = 23{,}3 - 1{,}9\,h_0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{3{,}7}{9{,}8 - 1{,}9} \approx 0{,}47 \text{ км},$$

как и по графику.




*Относительная влажность поднимающейся порции: растёт от 80% у земли и достигает 100% на высоте $h_0$. Выше пар конденсируется — это и есть облако (пунктир показывает, чему бы равнялась влажность без конденсации).*

Смысл: порция остывает на 9,8 К на каждый километр подъёма, а её точка росы снижается всего на 1,9 К, поэтому начальный разрыв 3,7 К между температурой и точкой росы закрывается за полкилометра.

**Ответ.** 1) $H \approx 30$ км ($7RT_0/(2\mu g) \approx 31$ км); 2) $h_0 \approx 0{,}5$ км (0,47 км; организаторы: 0,43 км).