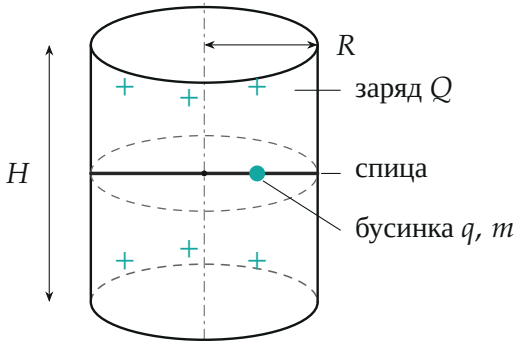
Бусинка

Задача 3. [ВсОШ 2016/17, 11 класс, задача 3] «Бусинка». Заряд Q равномерно распределён по поверхности диэлектрической тонкостенной закреплённой трубы радиуса R и длиной H. Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноудалённого от торцов) сечения.

Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считайте известным.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): труба с зарядом Q на поверхности, спица по диаметру серединного сечения, бусинка.

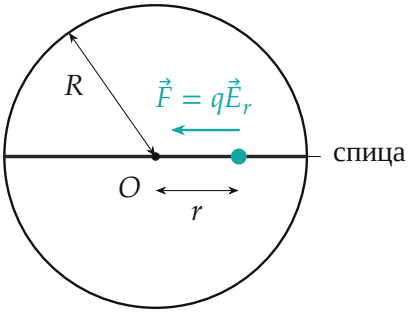
▲ **Решение. Что происходит.** В центре трубы поле равно нулю по симметрии, поэтому там положение равновесия бусинки. Вблизи центра поле мало и пропорционально смещению. Бусинка отталкивается от заряженных стенок, и если поле в плоскости сечения направлено к центру, возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению, то есть гармонические колебания: $m\ddot{r} = -\kappa r$. Вся задача — найти κ, то есть радиальное поле $E_r(r)$ около центра. Прямо интегрировать по поверхности трубы неудобно, поэтому разобьём путь: сначала поле на оси (там оно считается легко), потом из теоремы Гаусса — поле поперёк оси.

Обозначения. O — центр трубы, ось x направлена вдоль оси трубы, r — смещение бусинки от центра вдоль спицы, $L = \sqrt{R^2 + H^2/4}$ — расстояние от центра трубы до точек её торцевого края, $k = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^3}$ (оправдание — в пункте 2). Колебания малые: $r \ll R, H$.

1. Уравнение колебаний. Спица лежит в плоскости серединного сечения. По симметрии отражения относительно этой плоскости поле в ней лежит в плоскости, а по симметрии вращения — направлено вдоль радиуса. Вдоль спицы на бусинку действует только составляющая $qE_r(r)$ (спица не пускает бусинку вбок, силу тяжести не учитываем). Второй закон Ньютона для бусинки в проекции на ось вдоль спицы:

$$m\ddot{r} = qE_r(r).$$

Если $E_r(r) = -\beta r$ с $\beta > 0$, то $\ddot{r} = -\gamma\beta\, r$, а период $T = 2\pi/\sqrt{\gamma\beta}$. Неизвестным осталось β.



труба (вид вдоль оси)

Вид вдоль оси: бусинка на спице смещена на r; на неё действует сила $q\vec{E}_r$ к центру.

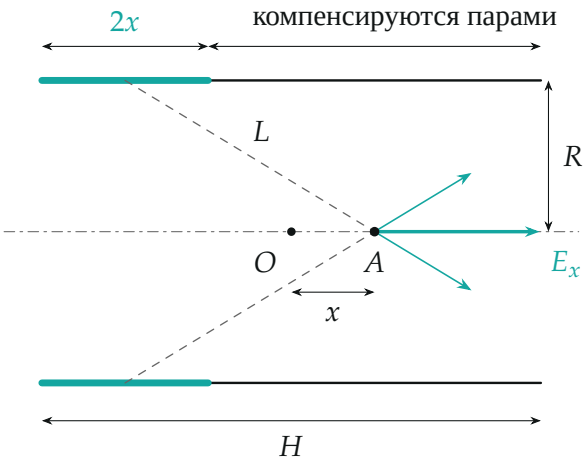
2. Поле на оси вблизи центра. Найдём $E_x(x)$ в точке A на оси на расстоянии $x \ll H$ от центра. Разобьём трубу на тонкие кольца. Кольца, расположенные симметрично относительно точки A (на одинаковых расстояниях s слева и справа), создают в A осевые поля одной величины и противоположных направлений — они взаимно уничтожаются. Не уничтожаются кольца от дальнего торца длиной $2x$: у них нет симметричных партнёров. Их заряд (по длине заряд распределён равномерно)

$$q_{\text{п}} = \frac{2x}{H}\,Q.$$

Поскольку $2x \ll H$, весь этот поясок можно считать кольцом на расстоянии $H/2$ от точки A вдоль оси (с точностью до малых порядка x/H), его точки находятся на расстоянии L от A. Поле кольца радиуса R на его оси на расстоянии $H/2$ от плоскости кольца — осевая составляющая:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\text{п}}{L^2}\cdot\frac{H/2}{L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2xQ}{H}\cdot\frac{H}{2L^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^3}\,x = k\,x.$$

Знак: поясок отталкивает точку от себя, поэтому поле направлено от дальнего торца — в сторону от центра, $E_x = +kx$.



Осевое сечение трубы. Кольца, симметричные относительно точки A, взаимно уничтожаются; остаётся поясок шириной $2x$ у дальнего торца. Тонкие стрелки — поля двух его точек, толстая — их сумма на оси.

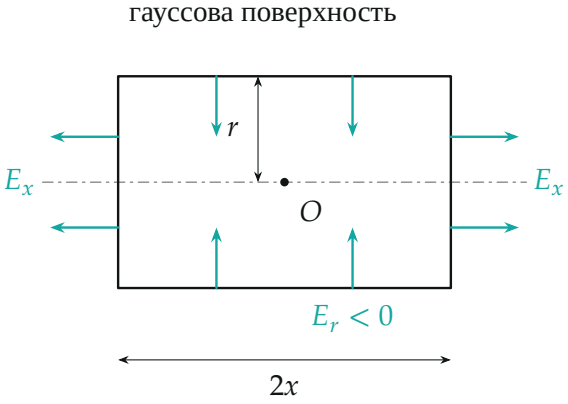
3. Поле поперёк оси. Применим теорему Гаусса для поля внутри трубы, где зарядов нет, к малому цилиндру радиуса r и высоты $2x$ ($x \ll r \ll R$, H), соосному с трубой и симметричному относительно O: поток поля через всю замкнутую поверхность равен нулю, потому что внутри неё заряда нет. Это даёт связь между осевым полем на основаниях и радиальным полем на боковой поверхности.

Через основание в точке $+x$ выходит поток $E_x(x)\cdot\pi r^2 = kx\,\pi r^2$. Через основание в точке $-x$ поле равно $-kx$, внешняя нормаль направлена

по $-x$, поток снова $kx\,\pi r^2$. Основания вместе: $2kx\,\pi r^2$ (на расстоянии $r \ll R$ от оси осевое поле почти такое же, как на оси). Через боковую поверхность поток $E_r \cdot 2\pi r \cdot 2x$. Теорема Гаусса:

$$2kx\,\pi r^2 + E_r \cdot 4\pi r x = 0 \quad \Rightarrow \quad E_r(r) = -\frac{k}{2}\,r = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 L^3}\,r.$$

Знак: радиальное поле направлено к оси, то есть к центру. Составляющая вдоль оси растёт от центра, радиальная убывает вдвое медленнее и в противоположную сторону — как и должно быть для поля без зарядов.



Гауссова поверхность в осевом сечении (не в масштабе): потоки через основания $2\pi r^2 \cdot kx$ уравновешиваются потоком через боковую поверхность.

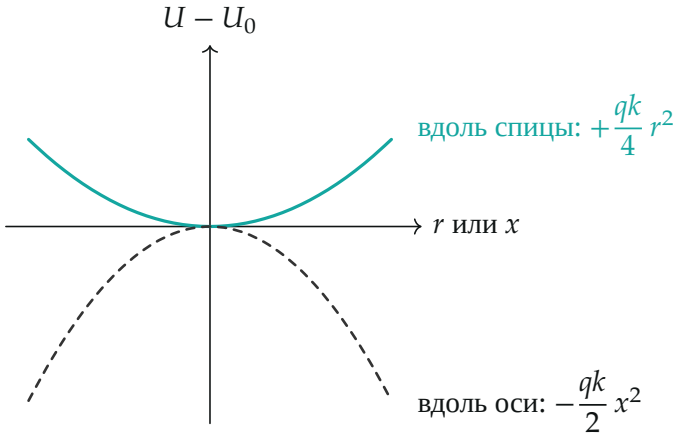
4. Период. Теперь $\beta = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 L^3}$, и из пункта 1

$$\omega^2 = \gamma\beta = \frac{\gamma Q}{8\pi\varepsilon_0 L^3}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 L^3}{\gamma Q}} = 2\pi L\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 L}{\gamma Q}},$$

где $L = \sqrt{R^2 + H^2/4}$. Заряд бусинки одного знака с Q, поэтому $\gamma Q > 0$ и колебания действительно есть.

Обратите внимание: вдоль оси равновесие неустойчиво — там $E_x = +kx$, и бусинку выталкивает из центра. Свободная бусинка в трубе вы-

летела бы вдоль оси; колебания возможны только потому, что спица запрещает движение вдоль оси.



Потенциальная энергия бусинки вблизи центра ($k = Q/(4\pi\varepsilon_0 L^3)$): вдоль спицы — парабола с минимумом, вдоль оси — с максимумом, кривизна вдвое меньше по модулю. Это «седло».

Проверка. Размерность: $\gamma Q/(\varepsilon_0 L^3) = \frac{(\text{Кл/кг}) \cdot \text{Кл}}{(\text{Ф/м})\,\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{кг}\,\text{Ф}\,\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\,\text{м}^2} = \text{с}^{-2}$ — так и должна быть квадрат частоты.

Предельные случаи. При $H \to 0$ труба становится кольцом, $L = R$, $E_r = -Qr/(8\pi\varepsilon_0 R^3)$ — это известное разложение поля внутри заряженного кольца в его плоскости (потенциал $\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)$). При $H \gg R$ получаем $E_r \sim Qr/H^3 \to 0$: внутри длинной трубы поле почти нулевое.

Второй способ найти E_r — без потоков. В пространстве без зарядов $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, в цилиндрических координатах $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rE_r)}{\partial r} = 0$. Подставим $E_x = kx$ и $E_r = -\beta r$: $k - 2\beta = 0$, то есть $\beta = k/2$ — тот же результат.

Третий способ — численный. Поле равномерно заряженной оболочки, посчитанное суммированием по $1{,}3 \cdot 10^6$ малых элементов при

$R = 1$, $H = 2$ (в единицах $Q/4\pi\varepsilon_0 = 1$): $E_r/r = -0{,}17678$, формула $-1/(2L^3) = -0{,}17678$; $E_x/x = 0{,}35354$, формула $1/L^3 = 0{,}35355$.

Смысл: возвращающая сила в трубе есть только поперёк оси, и только потому, что вдоль оси поле растёт — вместе они дают нулевую дивергенцию.

Ответ. $T = 2\pi L\sqrt{\dfrac{8\pi\varepsilon_0 L}{\gamma Q}}$, где $L = \sqrt{R^2 + H^2/4}$.