И снова МГД

Задача 4. [ВсОШ 2016/17, 11 класс, задача 4] «И снова МГД». Модель морского магнитогидродинамического двигателя, установленного под днищем катера (см. рис.), представляет собой прямоугольный канал ($a = 1{,}0$ м, $l = 2$ м, $h = 10$ см). К хорошо проводящим плоскостям hl подключён идеальный источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. Магнитное поле $B = 1$ Тл пронизывает канал перпендикулярно непроводящим плоскостям al. При движении катера с таким двигателем с постоянной скоростью u скорость вытекающей относительно катера воды $v = 10$ м/с.

Удельное сопротивление морской воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Ом·м, её плотность $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Найдите скорость движения катера, силу тяги, полезную мощность и КПД двигателя.

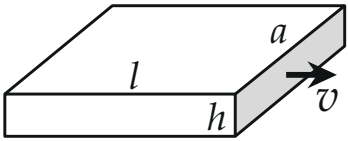
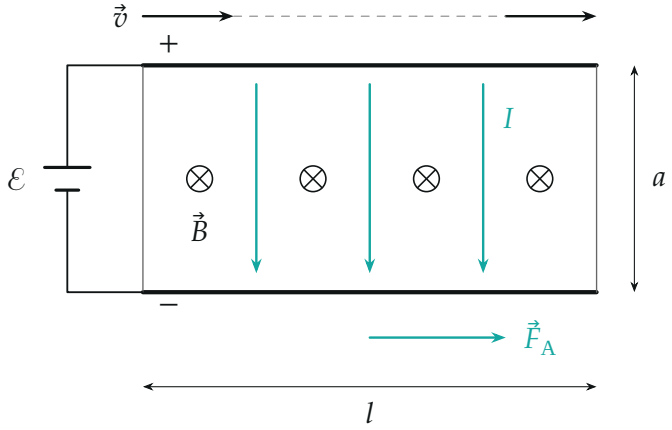


Рис. 11.2. Канал двигателя; стрелка — направление скорости воды v.

▲ **Решение. Что происходит.** Вода течёт по каналу вдоль l. Поперёк канала, между проводящими стенками, через воду идёт ток, а магнитное поле перпендикулярно и току, и течению. Сила Ампера толкает воду вдоль канала и разгоняет её; реакция этой силы толкает катер вперёд. Но вода движется в магнитном поле, как проводник, и в ней возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника: ток меньше, чем $\mathcal{E}/R$. Класс задачи — индукция: ЭДС → цепь → механика. Работаем в системе отсчёта катера: в ней магнит неподвижен, течение стационарное, вода вдали от катера набегает со скоростью u, а в канале и на выходе движется со скоростью v.

Обозначения. Ток идёт вдоль a (между стенками площадью hl), поле B направлено вдоль h, вода течёт вдоль l. R — сопротивление воды в канале, I — ток, $\mathcal{E}_и$ — ЭДС индукции, $\dot{m}$ — масса воды, проходящей через канал за единицу времени, T — сила тяги.



Канал сверху (вдоль h): ток I между стенками, поле B от нас, сила Ампера F_A и скорость воды v вдоль канала.

1. Ток в канале. Вода движется со скоростью v поперёк B; на длине a между стенками возникает ЭДС индукции

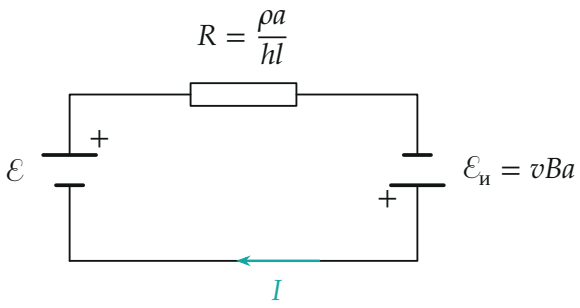
$$\mathcal{E}_{\text{и}} = vBa = 10 \text{ В}.$$

Она направлена против ЭДС источника: сила Ампера ускоряет воду, значит, энергия переходит от источника к воде, и ЭДС индукции работает как потребитель (правило Ленца). Сопротивление воды между стенками — проводник длиной a с сечением hl:

$$R = \frac{\rho a}{hl} = \frac{10^{-2} \cdot 1}{0{,}1 \cdot 2} = 0{,}05 \text{ Ом}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи с двумя встречными ЭДС (идеальный источник):

$$I = \frac{\mathcal{E} - vBa}{R} = \frac{hl\,(\mathcal{E} - vBa)}{\rho a} = \frac{100 - 10}{0{,}05} = 1800 \text{ А}.$$



Эквивалентная схема: источник $\mathcal{E}$, сопротивление воды R и встречная ЭДС индукции $\mathcal{E}_и = vBa$.

2. Энергия воды. Плотность тока в воде $j = I/(hl)$, сила Ампера на единицу объёма jB. Вода проходит канал длиной l, поэтому на каждый кубический метр воды сила Ампера совершает работу jBl. Запишем закон сохранения энергии для воды, прошедшей через канал, в системе катера, на единицу объёма: кинетическая энергия набегающей воды плюс работа силы Ампера равна кинетической энергии вытекающей воды,

$$\frac{\rho_в u^2}{2} + jBl = \frac{\rho_в v^2}{2}.$$

Применимость: давление вдали от катера и в вытекающей струе одно и то же (атмосферное), поэтому работа сил давления на воду в сумме нулевая; тепло, выделяющееся в воде при протекании тока, в механический баланс не входит.

3. Скорость катера. Подставим $j = I/(hl)$ и I из пункта 1:

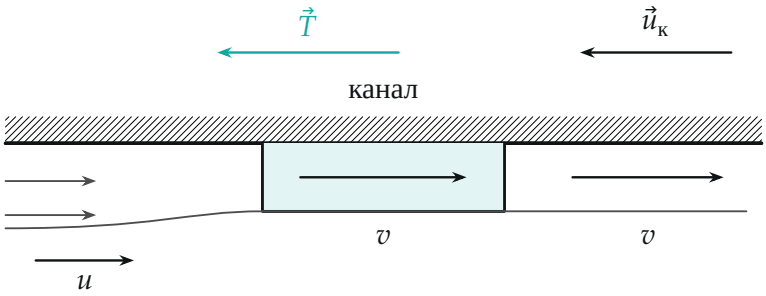
$$jBl = \frac{BI}{h} = \frac{Bl\,(\mathcal{E} - vBa)}{\rho a},$$

откуда

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{2Bl\,(\mathcal{E} - vBa)}{\rho\rho_в a}} = \sqrt{100 - \frac{2\cdot 2\cdot 90}{10}} = \sqrt{100 - 36} = 8\ \text{м/с}.$$

Здесь $\rho\rho_в a = 10^{-2}\cdot 10^3 \cdot 1 = 10$. Знак: $u < v$ — вода в канале разгоняется

относительно катера, как и должно быть.



Течение в системе катера: вода набегает со скоростью u, проходит канал и вытекает со скоростью $v > u$. Трубка тока вдали толще, чем в канале, потому что расход один и тот же: $Su = ahv$.

4. Сила тяги. За время Δt через канал проходит масса воды $\dot{m}\,\Delta t$, где $\dot{m} = \rho_в ahv = 10^3$ кг/с. Скорость этой воды в системе катера меняется от u до v, значит, её импульс меняется на $\dot{m}\,\Delta t\,(v - u)$ — такой же импульс вода получает от катера, а катер получает от воды (третий закон Ньютона) столько же с обратным знаком. Сила тяги

$$T = \dot{m}\,(v - u) = \rho_в ahv\,(v - u) = 10^3 \cdot 2 = 2\text{ кН}.$$

5. Мощность и КПД. Полезная мощность — мощность силы тяги при скорости катера u:

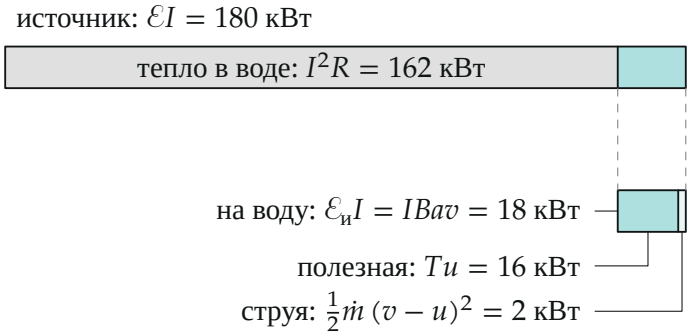
$$P_{пол} = Tu = 2000 \cdot 8 = 16\text{ кВт}.$$

Затрачивает мощность источник: $\mathcal{E}I = 100 \cdot 1800 = 180$ кВт. КПД

$$\eta = \frac{P_{пол}}{\mathcal{E}I} = \frac{16}{180} \approx 0{,}09 = 9\%.$$

Обратите внимание: сила тяги не равна силе Ампера $F_A = IBa = 1{,}8$ кН. Сила Ампера действует только на воду внутри канала, а разгоняться вода начинает ещё до входа. По уравнению Бернулли перед входом давление в струе падает на $\Delta p = \rho_в(v^2 - u^2)/2 = 18$ кПа (вода

ускоряется от u до v), а в канале сила Ампера возвращает его к атмосферному: $\Delta p \cdot ah = 1{,}8$ кН $= F_\text{A}$. Трубка тока перед входом сужается от сечения $S = ahv/u = 0{,}125$ м^2 до $ah = 0{,}1$ м^2, и окружающая вода давит на её стенки слабее атмосферного: недостающие 0,2 кН импульса струя получает от этих сил давления. Если взять $T = F_\text{A}$, получится $u = v - F_\text{A}/\dot m = 8{,}2$ м/с, $P_\text{пол} \approx 14{,}8$ кВт и $\eta \approx 8{,}2\%$: организаторы указывают, что этот «динамический» путь не вполне корректен (закон сохранения импульса применён к незамкнутой системе — воде канала без окружающей), предпочтителен энергетический.



Куда уходит мощность источника: почти всё — в тепло; на воду — 18 кВт, из них 16 кВт полезны.

Проверка. Размерность величины под корнем:

$$\frac{Bl\,(\mathcal{E} - vBa)}{\rho\rho_\text{в}a} \sim \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot(\text{кг}/\text{м}^3)\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},$$

как у v^2. Пределы: при $B \to 0$ (нет силы Ампера) получаем $u = v$ и $T = 0$; при $\mathcal{E} = vBa$ (ток равен нулю) тоже $u = v$, $T = 0$.

Второй способ — баланс мощности. Мощность источника расходуется на нагрев воды током и на ЭДС индукции: $\mathcal{E}I = I^2R + \mathcal{E}_\text{и}I$, то есть $180 = 162 + 18$ кВт. Мощность $\mathcal{E}_\text{и}I = IBav = 18$ кВт — это мощность силы Ампера над водой, и она должна быть равна приросту кинетической энергии воды в секунду: $\dot m\,(v^2 - u^2)/2 = 10^3 \cdot 36/2 = 18$ кВт — сошлось.

Эти 18 кВт делятся на $Tu = 16$ кВт полезных и $\dot{m}\,(v-u)^2/2 = 2$ кВт кинетической энергии струи относительно окружающей воды (она уходит от катера со скоростью $v - u$): $16 + 2 = 18$.

Смысл: КПД мал, потому что у морской воды маленькое удельное сопротивление и ток огромный — 162 из 180 кВт уходит в тепло.

Ответ. 1) $u = 8$ м/с; 2) $T \approx 2$ кН; 3) $P_{\text{пол}} \approx 16$ кВт; 4) $\eta \approx 9\%$.