Лунное затмение

Задача 5. [ВсОШ 2016/17, 11 класс, задача 5] «Лунное затмение». Как известно, Солнце не является точечным источником света, а имеет малый угловой диаметр (при наблюдении с Земли) $2\delta = 0{,}52°$. Этот факт приводит к тому, что область полной тени за Землёй оказывается конечной.

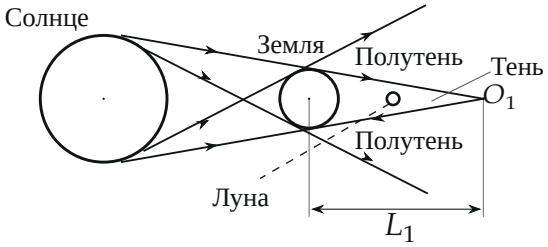


Рис. 11.3

1. Пусть рефракция (явление преломления солнечных лучей в земной атмосфере) отсутствует. На каком расстоянии L_1 от Земли ещё будет наблюдаться полная тень? Найдите продолжительность полного лунного затмения в этом случае.
2. В действительности рефракция оказывает существенное влияние на размер области полной тени. Пусть атмосфера Земли имеет приведённую высоту $h = 8$ км и средний показатель преломления $n = 1{,}00028$. Полагая, что границу тени образуют лучи, идущие по касательной к поверхности Земли, определите, на каком максимальном расстоянии L_2 теперь будет наблюдаться полная тень? Какая часть площади лунного диска окажется затенена?

Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, угловой диаметр Луны равен угловому диаметру Солнца 2δ, период обращения Луны вокруг Земли $T_0 = 27{,}3$ сут.

▲ **Решение. Что происходит.** Солнце — протяжённый источник, поэтому за Землёй полная тень (куда не доходит свет ни от какой точки Солнца) имеет форму конуса. Края конуса — лучи от противоположных краёв солнечного диска, скользящие по краю Земли; они пересекаются на оси, и там полная тень кончается. Луна проходит через эту

область; затмение полное, пока диск Луны целиком лежит в круге тени на её расстоянии. Без атмосферы всё решает геометрия конуса с углом δ при вершине (пункт 1). Атмосфера преломляет лучи, идущие вдоль поверхности, и отклоняет их к Земле: конус сходится под большим углом, и тень короче (пункт 2). Класс задачи — геометрическая оптика плюс движение по окружности.

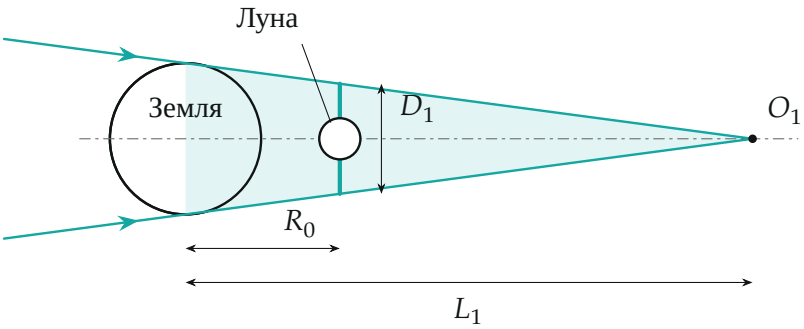
Обозначения. $\delta = 0{,}26^\circ = 4{,}54 \cdot 10^{-3}$ рад — угловой радиус Солнца и Луны, R_0 — радиус лунной орбиты, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — угловая скорость Луны, D — диаметр Луны, D_1 — диаметр круга тени на уровне Луны, O_1 — вершина конуса тени.

Пункт 1. Без рефракции.

1. Длина конуса тени. Крайние лучи идут от краёв Солнца под углом δ к оси и скользят по краю Земли, то есть на расстоянии R от оси. До пересечения с осью им нужно пройти вдоль оси L_1, при этом сместиться на R поперёк:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{R}{L_1} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{R}{\operatorname{tg}\delta} \approx \frac{R}{\delta} = \frac{6400}{4{,}54 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Дальше L_1 полной тени нет: там можно увидеть края Солнца с обеих сторон Земли.



Конус полной тени (рисунок не в масштабе: угол δ увеличен). Тень сужается до точки O_1; на расстоянии R_0 она — круг диаметра D_1, в котором проходит Луна.

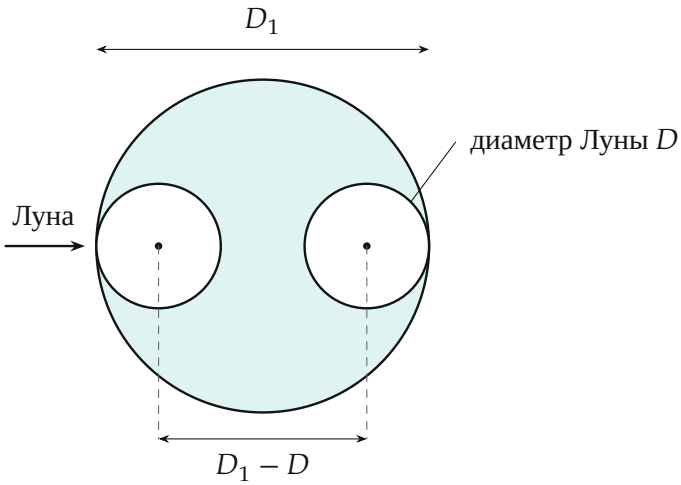
2. Радиус лунной орбиты. Луна движется по окружности под действием притяжения Земли. Запишем второй закон Ньютона для Луны в проекции на радиус, учтя $GM_3 = gR^2$ (сила тяжести у поверхности Земли):

$$\omega_0^2 R_0 = \frac{GM_3}{R_0^2} = \frac{gR^2}{R_0^2} \quad \Rightarrow \quad R_0 = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}}.$$

Подставим $T_0 = 27{,}3 \cdot 86400$ с $= 2{,}36 \cdot 10^6$ с, $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м: $R_0 \approx 3{,}84 \cdot 10^8$ м $= 384$ тыс. км. Это меньше L_1, поэтому Луна проходит в области полной тени.

3. Размеры Луны и тени. Луну видно под тем же углом 2δ, поэтому $D = 2\delta R_0 \approx 3{,}5 \cdot 10^3$ км. На расстоянии R_0 радиус круга тени уменьшился от R линейно по пути к вершине: $\dfrac{D_1}{2} = R\left(1 - \dfrac{R_0}{L_1}\right)$,

$$D_1 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) = 12\,800 \cdot (1 - 0{,}272) \approx 9{,}3 \cdot 10^3 \text{ км}.$$



Сечение тени на уровне Луны в масштабе: круг диаметра D_1 и два крайних положения диска Луны (касание края тени изнутри). Полная тень, пока диск внутри круга; центр Луны проходит $D_1 - D$.

4. Продолжительность полного затмения. Затмение полное, пока диск Луны целиком внутри круга тени: центр Луны проходит по диаметру тени путь $D_1 - D$ (от момента, когда Луна касается края тени изнутри, до момента, когда касается другого края). Предполагаем центральное затмение и неподвижную тень; скорость Луны $\omega_0 R_0$:

$$T = \frac{D_1 - D}{\omega_0 R_0} = T_0 \frac{D_1 - D}{2\pi R_0} = 655\text{ ч} \cdot \frac{9{,}3 - 3{,}5}{2\pi \cdot 384} \approx 1{,}6\text{ ч}.$$

Здесь $T_0 = 27{,}3 \cdot 24\text{ ч} = 655\text{ ч}$.

Замечание: тень Земли движется вместе с Землёй по орбите (около 1° в сутки); учёт этого дал бы 1,7 ч. Условие такой поправки не требует: ответ — 1,6 ч.

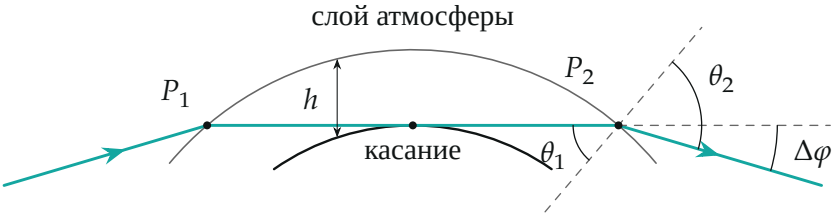
Пункт 2. С рефракцией.

5. Ход луча в атмосфере. Считаем атмосферу однородным слоем толщиной h с показателем преломления n. Луч идёт внутри слоя прямо и по условию касается поверхности Земли — это хорда внешней границы слоя, касающаяся сферы радиуса R. Пусть P_2 — точка выхода луча, θ_1 — угол между хордой и радиусом границы (нормалью) в этой точке. В прямоугольном треугольнике из центра O, точки касания и P_2 гипотенуза равна $R + h$, а катет против угла θ_1 равен R:

$$\sin\theta_1 = \frac{R}{R+h}.$$

Удобнее угол $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \theta_1$ между хордой и касательной к границе:

$$\cos\gamma = \frac{R}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx \sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{\frac{16}{6400}} = 0{,}05\text{ рад } (2{,}9^\circ).$$



Луч касается поверхности Земли внутри слоя атмосферы и преломляется на выходе в P_2 (рисунок не в масштабе: h и n увеличены). Штриховые линии — нормаль в P_2 и продолжение хорды; $\Delta\varphi$ — отклонение луча к Земле.

6. Закон преломления. Закон Снеллиуса на выходе из слоя в вакуум: $\sin\theta_2 = n\sin\theta_1$, где θ_2 — угол выходящего луча с нормалью. Обозначим $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta_2$ — угол выходящего луча с касательной к границе. Тогда

$$\cos\varphi = n\cos\gamma, \qquad \Delta\varphi = \theta_2 - \theta_1 = \gamma - \varphi$$

— отклонение луча к Земле (рисунок): $\theta_2 > \theta_1$, потому что $n > 1$.

Углы малы, $n = 1 + \Delta n$, $\Delta n = 2{,}8\cdot10^{-4}$: $1 - \dfrac{\varphi^2}{2} \approx (1+\Delta n)\left(1 - \dfrac{\gamma^2}{2}\right)$, откуда $\varphi^2 \approx \gamma^2 - 2\Delta n$ (слагаемым третьего порядка пренебрегаем). Числа:

$$\varphi = \sqrt{2{,}5\cdot10^{-3} - 5{,}6\cdot10^{-4}} = \sqrt{1{,}94\cdot10^{-3}} = 0{,}0440,$$

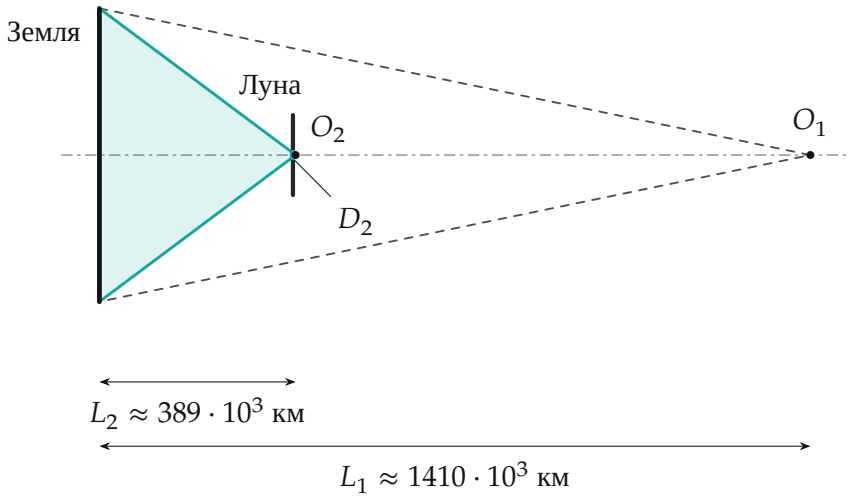
$$\Delta\varphi = \gamma - \varphi = 0{,}0500 - 0{,}0440 = 5{,}95\cdot10^{-3}\text{ рад } (0{,}34^\circ).$$

Обратите внимание: $\varphi = \sqrt{\gamma^2 - 2\Delta n}$ *не* стоит разлагать до $\Delta\varphi \approx \Delta n/\gamma$: здесь $2\Delta n/\gamma^2 = 0{,}22$ — не мало, и формула даёт $5{,}60\cdot10^{-3}$ вместо $5{,}95\cdot10^{-3}$, на 6% меньше. Дальше разница усилится (пункт 8).

7. Отклонение лучей и конус тени. Луч отклоняется к Земле дважды — при входе в слой и при выходе: всего на $2\Delta\varphi$. Лучи, образующие границу тени, подходят к Земле под углом δ к оси, а после атмосферы идут под углом $\delta + 2\Delta\varphi$: угол при вершине конуса вырос с 2δ до $2(\delta + 2\Delta\varphi)$:

$$\delta + 2\Delta\varphi = 4{,}54\cdot10^{-3} + 11{,}9\cdot10^{-3} = 1{,}644\cdot10^{-2},$$

$$L_2 = \frac{R}{\delta + 2\Delta\varphi} = \frac{6400}{1{,}644\cdot10^{-2}} \approx 3{,}89\cdot10^5 \text{ км}.$$



Разрез тени вдоль оси (масштабы по осям разные). Пунктир — граница тени без атмосферы (вершина O_1), бирюзовая — с атмосферой (вершина O_2). Луна на расстоянии R_0 лишь немного не доходит до вершины; пятно тени на её уровне — маленький отрезок D_2.

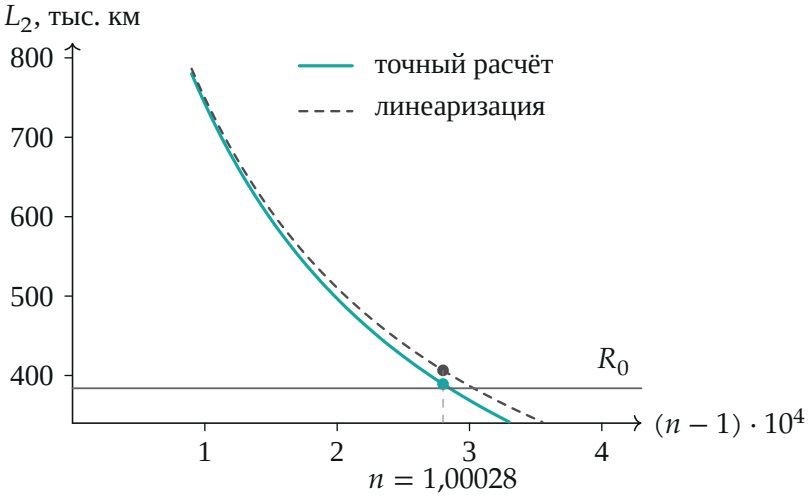
8. Размер тени на уровне Луны и доля площади. Расстояние до вершины $L_2 = 389$ тыс. км чуть больше, чем до Луны, $R_0 = 384$ тыс. км, поэтому на уровне Луны от тени осталось маленькое пятно. Его диаметр по тому же построению, что в пункте 3:

$$D_2 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_2}\right) = 12\,800 \cdot \left(1 - \frac{384}{389}\right) \approx 1{,}8 \cdot 10^2 \text{ км}.$$

Пятно меньше диска Луны, поэтому затенена та часть площади лунного диска, которая равна отношению площадей кругов (при центральном затмении):

$$\varepsilon = \left(\frac{D_2}{D}\right)^2 = \left(\frac{176}{3484}\right)^2 \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}25\%.$$

Результат очень чувствителен: D_2 определяется малой разностью почти равных чисел L_2 и R_0 (между ними 1,4%), поэтому для ε надёжна лишь оценка порядка величины: десятые доли процента.



Расстояние до вершины тени в зависимости от n ($h = 8$ км): точный расчёт и линеаризация $\Delta\varphi = \Delta n/\gamma$. При $n - 1 \approx 2{,}85 \cdot 10^{-4}$ вершина тени на уровне Луны; при $n = 1{,}00028$ — на 389 тыс. км (линеаризация: 407).

Проверка. Углы безразмерны; L_2 измеряется в тех же единицах, что R. Предел: при $n \to 1$ получаем $\Delta\varphi \to 0$ и $L_2 \to L_1$. Порядок величины $\Delta\varphi$ как у реальной рефракции на горизонте (около 0,5°).

Второй способ — расчёт хода луча на python по векторному закону Снеллиуса (хорда $y = R$, нормаль $\vec{P}_2/|\vec{P}_2|$): отклонение $5{,}9525 \cdot 10^{-3}$ рад, как $\gamma - \varphi$. Прицельное расстояние nR вместо R даёт $L_2 = 389{,}3$ вместо 389,2 тыс. км.

Расхождение с официальным решением: оно линеаризует $\Delta\varphi = \Delta n/\gamma$ и получает $L_2 \approx 408$ тыс. км, $\varepsilon \approx 4{,}8\%$. Из-за малой разности $L_2 - R_0$ ошибка в 6% у $\Delta\varphi$ даёт 4,5% у L_2 и четырёхкратную у D_2. В критериях проверки организаторов стоят $L_2 = 389$ тыс. км и $\varepsilon = 0{,}0024$ — в согласии с точным расчётом выше (389,2 тыс. км и $2{,}5 \cdot 10^{-3}$; разница 0,0024 и 0,0025 — лишь округление D_2).

Смысл: рефракция сокращает тень — лучи, прошедшие у поверхности, отклоняются к оси, и вершина тени подходит почти к самой Луне; полное затмение на таком расстоянии — на пределе.

Ответ. 1) $L_1 \approx 1{,}4 \cdot 10^6$ км, $T \approx 1{,}6$ ч; 2) $L_2 \approx 3{,}9 \cdot 10^5$ км (389 тыс. км), затенена доля $\varepsilon \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ (0,25%).