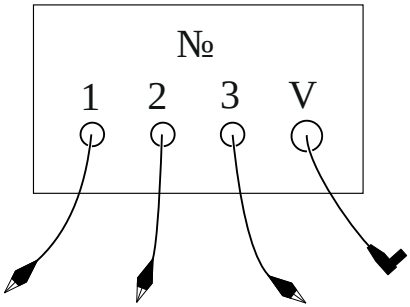
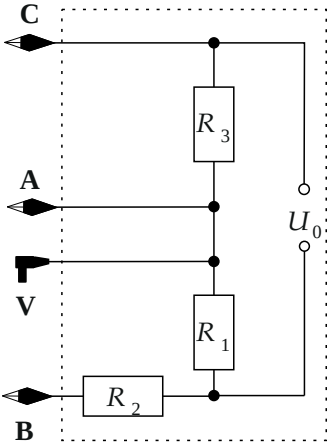
Висячий мост

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 9 класс, практический тур, задача 2] «Висячий мост».

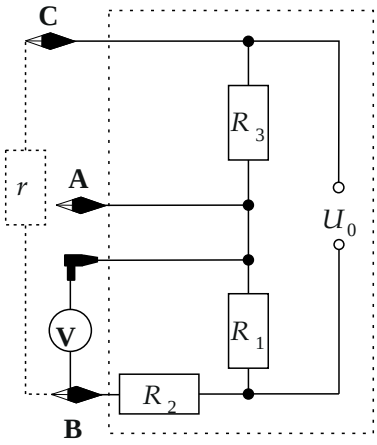
Проведите исследование электрических параметров «серого ящика», содержащего три резистора и идеальный источник постоянного напряжения U_0. Общий вид и схема ящика приведены на рисунках.





1. Запишите номер выданного ящика.
2. Установите соответствие между выводами 1, 2, 3 и точками A, B, C схемы «серого ящика» (рис.).
3. Снимите зависимость напряжения между точками A и B от значения сопротивления r ветви BC (см. рис.) и постройте её график.

4. Найдите сопротивления резисторов R_1, R_2, R_3 и напряжение U_0 идеального источника, находящегося в «сером ящике». Оцените погрешности полученных результатов.



Примечание. Погрешности сопротивлений выданных резисторов составляют 2% от номиналов; упрощённо погрешность мультиметра можно считать равной трём единицам последнего разряда.

Оборудование: мультиметр с одним проводом (режим амперметра отключён); «серый ящик» с проводом для подключения к мультиметру (штекер) и тремя выводами, обозначенными 1, 2, 3; набор из трёх резисторов 1,0 кОм, 2,0 кОм, 4,7 кОм; миллиметровая бумага.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «чёрный ящик»: внутри — делитель напряжения R_3–R_1 на источнике U_0 и «хвост» R_2, по которому ток не идёт, пока к выводу B ничего не подключено. Вольтметр ящика одним концом постоянно соединён с точкой A (вывод V подключён внутри к той же точке), а щупом мы касаемся выводов. Сопротивление мультиметра в режиме вольтметра — мегаомы, во много раз больше килоомных резисторов, поэтому вольтметр считаем идеальным (это проверим).

Обозначения. T — верхний узел (он же C), D — нижний узел (между R_1, R_2 и источником); потенциал D примем за нуль, тогда у T потенциал U_0. Доля $a = \dfrac{R_1}{R_1 + R_3}$, отношение $\alpha = \dfrac{R_3}{R_1}$.

1. Потенциалы точек без нагрузки. Ток источника идёт только через R_3 и R_1 (через R_2 — нет, ветвь не замкнута). По закону Ома для делителя

$$\varphi_C = U_0, \qquad \varphi_A = aU_0, \qquad \varphi_B = \varphi_D = 0.$$

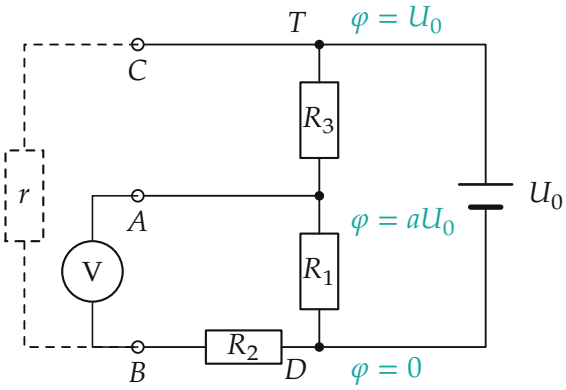


Рис. 1. Схема ящика, перерисованная по узлам: делитель R_3, R_1 на источнике, вывод B подключён к нижнему узлу через R_2. Пунктир — внешний резистор r ветви BC (пункт 3), вольтметр — между A и B.

Пункт 2. Какой вывод какой.

- Касаемся щупом поочерёдно трёх выводов. Где вольтметр показывает 0, там точка A: щуп и общий конец соединены напрямую.
- На двух других выводах показания $|\varphi_C - \varphi_A| = (1-a)U_0$ и $|\varphi_B - \varphi_A| = aU_0$, по ним одним B и C не различить — неизвестно, какое плечо делителя больше.
- Соединяем A проводом с одним из оставшихся выводов и касаемся щупом последнего. Если замкнули A с C, то R_3 закорочен, $\varphi_A = U_0$, а у B по-прежнему 0 — вольтметр показывает почти U_0. Если замкнули A с B, то R_2 встаёт параллельно R_1, на C получаем только часть U_0. Максимальное показание и есть U_0, а вывод, на котором оно получено, — B.

Для ящика организаторов: вывод 1 — C, 2 — A, 3 — B; $U_0 = 1{,}636$ В. Без перемычек $|U_{CA}| = 0{,}982$ В, $|U_{BA}| = 0{,}651$ В; их сумма 1,633 В

отличается от U_0 на 3 мВ — в пределах погрешности, значит, вольтметр действительно не нагружает делитель. Отсюда

$$\alpha = \frac{R_3}{R_1} = \frac{|U_{CA}|}{|U_{BA}|} = \frac{0{,}982}{0{,}651} = 1{,}51, \qquad a = \frac{0{,}651}{1{,}636} = 0{,}398.$$

Пункт 3. Зависимость $U_{AB}(r)$. Подключаем резистор r (резисторы набора, их последовательные и параллельные соединения — от 0 до 7,7 кОм) между B и C, вольтметр — между A и B (рис. 1). Теперь ток идёт через R_2 и r, они образуют второй делитель на том же U_0:

$$\varphi_B = U_0 \frac{R_2}{R_2 + r}, \qquad U(r) = \varphi_A - \varphi_B = aU_0 - U_0 \frac{R_2}{R_2 + r},$$

$$U(r) = U_0 \frac{R_1 r - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + r)}.$$

Это гипербола: при $r = 0$ $U = -(1 - a)U_0 \approx -0{,}98$ В, при $r \to \infty$ $U \to aU_0 = 0{,}651$ В (пунктир на рис. 2), меняет знак при

$$r_0 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \alpha R_2.$$

«Мост» $R_3/R_1 = r/R_2$ уравновешен — отсюда название задачи.

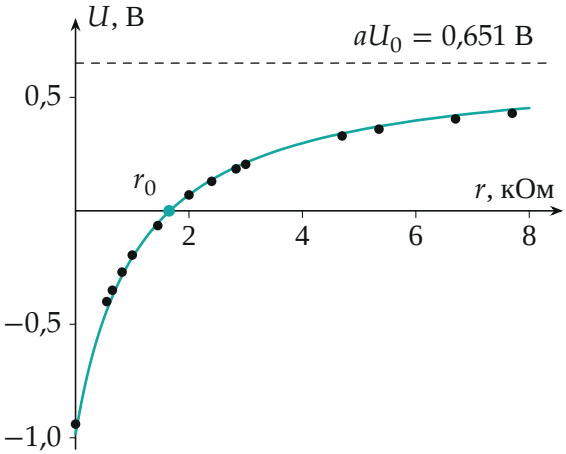


Рис. 2. Напряжение $U = \varphi_A - \varphi_B$ от сопротивления r ветви BC: точки — опыт (по графику организаторов), кривая — формула при $U_0 = 1{,}636$ В, $aU_0 = 0{,}651$ В, $R_2 = 1{,}10$ кОм.

Пункт 4. Параметры ящика.

2. U_0**.** Измерен прямо в пункте 2: $U_0 = (1{,}636 \pm 0{,}003)$ В.

3. R_2 **по графику.** Из формулы пункта 3 каждая точка даёт своё R_2:

$$R_2 = r\,\frac{aU_0 - U}{U_0 - aU_0 + U}.$$

По точкам рис. 2 получаем значения от 0,99 до 1,20 кОм (у точек с малым r ошибка чтения графика сказывается сильнее), среднее $R_2 \approx 1{,}1$ кОм. Тот же результат даёт нуль графика: $r_0 \approx 1{,}65$ кОм, $R_2 = r_0/a = 1{,}65/1{,}51 = 1{,}09$ кОм. Быстрее и точнее — вольтметром прямо параллельно известному r (между B и C): $R_2 = r\,\dfrac{U_0 - U_{BC}}{U_{BC}}$; усреднение по трём резисторам набора даёт $R_2 = (1{,}08 \pm 0{,}03)$ кОм.

4. R_3 **и** R_1**.** Делитель R_3–R_1 без нагрузки даёт только отношение a. Нужна ещё одна точка: подключаем известный r между A и C (параллельно R_3) и измеряем напряжение U_2 на C относительно A. Параллельное сопротивление $R_3' = \dfrac{R_3 r}{R_3 + r}$ стоит в делителе вместо R_3:

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{R_3'}{R_1 + R_3'} \;\Rightarrow\; R_3' = R_1\frac{U_2}{U_0 - U_2} = \frac{R_3}{a}\cdot\frac{U_2}{U_0 - U_2},$$

откуда, сокращая R_3,

$$R_3 = r\left(\frac{a\,(U_0 - U_2)}{U_2} - 1\right), \qquad R_1 = \frac{R_3}{a}.$$

Например, при $r = 2{,}0$ кОм напряжение должно упасть с 0,982 примерно до 0,57 В. Усреднение по резисторам набора даёт $R_3 = 3{,}56$ кОм, $R_1 = 3{,}56/1{,}51 = 2{,}37$ кОм. Подстановка: $r_0 = R_2R_3/R_1 = 1{,}08\cdot 1{,}51 = 1{,}63$ кОм — совпадает с нулём графика.

5. Погрешности. Вольтметр — 3 единицы последнего разряда,

± 3 мВ; резисторы набора — 2%. Для R_2 главное — 2% от r и ошибка разности $U_0 - U_{BC}$: $\Delta R_2 \approx 0{,}03$ кОм. В формуле для R_3 вычитается единица, и относительная погрешность растёт примерно вдвое: $\Delta R_3 \approx 0{,}16$ кОм, $\Delta R_1 \approx 0{,}13$ кОм. Организаторы при проверке принимали $R_1 = 2{,}37 \pm 0{,}26$, $R_2 = 1{,}08 \pm 0{,}06$, $R_3 = 3{,}56 \pm 0{,}32$ кОм — вдвое шире нашей оценки.

Обратите внимание: вольтметр в этом ящике всегда «сидит» на точке A, поэтому все измерения — это потенциалы относительно середины делителя. Знак $U(r)$ меняется: по нулю графика видно, когда мост сбалансирован.

Проверка. Размерность формул — отношения напряжений, умноженные на сопротивление. Сумма напряжений плеч без нагрузки $0{,}982 + 0{,}651 = 1{,}633 \approx U_0$; кривая с найденными параметрами проходит через все точки опыта с отклонением не больше 0,05 В (рис. 2).

Смысл: одним вольтметром и известными резисторами «ящик» раскрывается полностью — сначала по нулям и максимумам находим выводы и U_0, затем по делителям — сопротивления.

Ответ. 2) вывод 1 — C, 2 — A, 3 — B (для ящика организаторов); 3) $U_{AB}(r) = U_0 \dfrac{R_1 r - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + r)}$, гипербола от $-0{,}98$ В до 0,65 В, нуль при $r \approx 1{,}65$ кОм; 4) $U_0 = (1{,}636 \pm 0{,}003)$ В, $R_1 = (2{,}37 \pm 0{,}13)$ кОм, $R_2 = (1{,}08 \pm 0{,}03)$ кОм, $R_3 = (3{,}56 \pm 0{,}16)$ кОм.