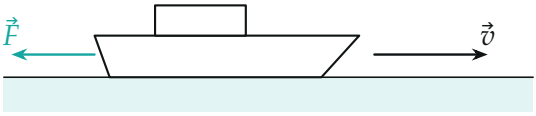
Тише едешь...

Задача 1. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 9 класс, задача 1] «Тише едешь...».

В безветренную погоду на озере была проведена серия испытаний радиоуправляемой модели катера с бензиновым двигателем, в ходе которых выяснилось, что при скорости $v_1 = 5{,}00$ км/ч путевой расход топлива составляет $\lambda_1 = 20{,}0$ г/км, а при скорости $v_2 = 15{,}0$ км/ч расход равен $\lambda_2 = 40{,}0$ г/км. Запас топлива на борту модели $M = 100$ г.

1. Выведите зависимость путевого расхода топлива λ от скорости v.
2. Какое максимальное время τ_x может работать двигатель у неподвижной модели?
3. При какой скорости модели v_0 путевой расход топлива минимален и каково его значение λ_0? Полученные результаты должны быть найдены с погрешностью, не превышающей 1%.
4. На какое максимальное расстояние L_0 и за какое время τ_0 сможет уплыть модель?
5. Какие значения τ_1 может принимать время прохождения моделью расстояния $L_1 = 3$ км?

Примечание. Считайте, что при работе двигателя массовый расход топлива μ (г/с) линейно зависит от мощности силы сопротивления, а сила сопротивления пропорциональна скорости модели относительно воды. Модель движется равномерно и при любой скорости её осадка не меняется.



$$F = kv,\ N = Fv = kv^2$$

Поясняющий рисунок: модель плывёт с постоянной скоростью $\vec{v}$, вода тормозит её силой $\vec{F}$, пропорциональной скорости.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача класса «расход топлива = холостой ход + полезная работа». Двигатель тратит топливо двумя способами: часть уходит даже на месте (холостой ход), часть пропорциональна

мощности, которую он отдаёт на преодоление сопротивления воды. На километр пути первое слагаемое тем больше, чем дольше идём (медленно), второе — тем больше, чем быстрее. Отсюда минимум расхода на километр при некоторой средней скорости и два возможных режима для любого пути короче предельного.

Обозначения. μ — массовый расход (г/ч), μ_0 — расход на холостом ходу, N — мощность силы сопротивления, λ — путевой расход (г/км), v — скорость (км/ч).

Пункт 1. Зависимость $\lambda(v)$.

1. Мощность сопротивления. Модель движется равномерно, значит, по второму закону Ньютона в проекции на направление движения сила тяги двигателя равна силе сопротивления $F = kv$. Мощность, которую двигатель тратит на её преодоление,

$$N = Fv = kv^2.$$

2. Массовый расход. По условию μ линейно зависит от N: $\mu = \mu_0 + \beta N = \mu_0 + \beta k v^2$. Обозначим $\alpha = \beta k$:

$$\mu = \mu_0 + \alpha v^2.$$

3. Путевой расход. Путь L модель проходит за время $\tau = L/v$ и сжигает массу $\mu\tau$. На единицу пути:

$$\lambda = \frac{\mu\tau}{L} = \frac{\mu}{v} = \alpha v + \frac{\mu_0}{v}. \qquad (1)$$

Первое слагаемое — «плата за скорость», второе — «плата за время».

4. Константы из опытов. Подставим оба опыта в (1) и умножим на v:

$$\lambda_1 v_1 = \alpha v_1^2 + \mu_0, \qquad \lambda_2 v_2 = \alpha v_2^2 + \mu_0.$$

Вычитая первое из второго, исключаем μ_0:

$$\alpha = \frac{\lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{600 - 100}{225 - 25} = 2{,}50\ \frac{\text{г} \cdot \text{ч}}{\text{км}^2},$$

$$\mu_0 = \lambda_1 v_1 - \alpha v_1^2 = 100 - 62{,}5 = 37{,}5 \text{ г/ч}.$$

Итак, $\lambda = 2{,}5v + \dfrac{37{,}5}{v}$ (λ в г/км, v в км/ч). График — на рис. 1; он проходит через обе опытные точки.

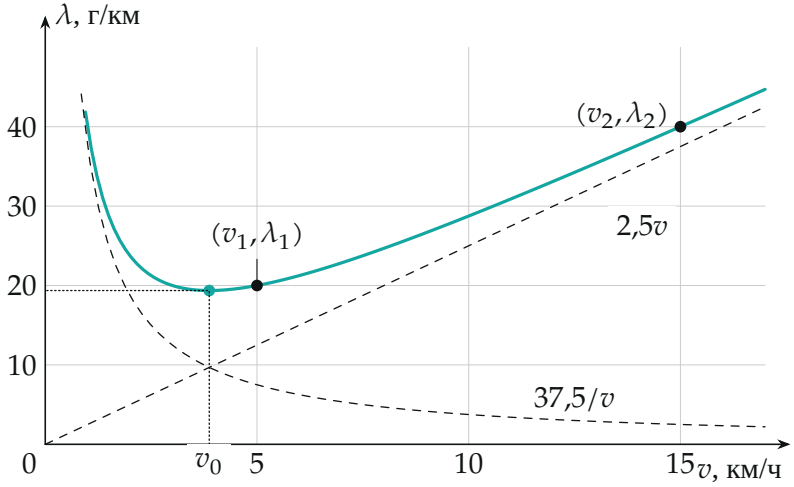


Рис. 1. Путевой расход $\lambda(v)$ (бирюзовая) — сумма «платы за скорость» $2{,}5v$ и «платы за время» $37{,}5/v$ (пунктиры). Точки — данные опытов, минимум — при v_0.

Пункт 2. Неподвижная модель. При $v = 0$ из $\mu = \mu_0 + \alpha v^2$ остаётся только холостой расход. Всё топливо сгорит за

$$\tau_x = \frac{M}{\mu_0} = \frac{100}{37{,}5} \text{ ч} = 2{,}67 \text{ ч} = 160 \text{ мин}.$$

Пункт 3. Минимальный путевой расход. Найдём, при каком λ уравнение (1) ещё имеет решение относительно v. Умножим (1) на v:

$$\alpha v^2 - \lambda v + \mu_0 = 0.$$

Корни есть, пока дискриминант $\lambda^2 - 4\alpha\mu_0 \geq 0$. Наименьшее возможное λ — при нулевом дискриминанте, тогда корень один:

$$\lambda_0 = 2\sqrt{\alpha\mu_0} = 2\sqrt{2{,}5 \cdot 37{,}5} = 19{,}36 \text{ г/км},$$

$$v_0 = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}} = \sqrt{15} = 3{,}873 \text{ км/ч}.$$

Второй способ — неравенство о средних: $\alpha v + \mu_0/v \geq 2\sqrt{\alpha v \cdot \mu_0/v} = 2\sqrt{\alpha\mu_0}$, равенство при $\alpha v = \mu_0/v$, то есть когда «плата за скорость» равна «плате за время» (на рис. 1 пунктиры пересекаются как раз над v_0). Расчёт точный, так что погрешность определяется только округлением: $v_0 \approx 3{,}87$ км/ч, $\lambda_0 \approx 19{,}4$ г/км — заведомо лучше 1%.

Пункт 4. Максимальная дальность. Путь при постоянной скорости $L = M/\lambda$ наибольший, когда λ наименьший, то есть при $v = v_0$:

$$L_0 = \frac{M}{\lambda_0} = \frac{100}{19{,}36} = 5{,}16 \text{ км}, \qquad \tau_0 = \frac{L_0}{v_0} = \frac{5{,}16}{3{,}873} \text{ ч} = 1{,}33 \text{ ч} = 80 \text{ мин}.$$

Заметим: $\tau_0 = \dfrac{M}{\lambda_0 v_0} = \dfrac{M}{2\mu_0} = \dfrac{\tau_x}{2}$ — в оптимальном режиме ровно половина топлива идёт на холостой ход.

Пункт 5. Время на $L_1 = 3$ км. Путь $L_1 < L_0$, поэтому топлива хватает не только при v_0, но и в некотором интервале скоростей. Чтобы пройти L_1, нужно $\lambda \leq M/L_1 = 33{,}3$ г/км. Граничные скорости — корни уравнения $\alpha v^2 - \dfrac{M}{L_1} v + \mu_0 = 0$ (рис. 2):

$$v_\pm = \frac{M/L_1 \pm \sqrt{(M/L_1)^2 - 4\alpha\mu_0}}{2\alpha} = \frac{33{,}3 \pm 27{,}1}{5},$$

$$v_+ = 12{,}09 \text{ км/ч}, \quad v_- = 1{,}240 \text{ км/ч}.$$

Время пути $\tau_1 = L_1/v$:

$$\tau_{\min} = \frac{3}{12{,}09} \text{ ч} = 0{,}248 \text{ ч} \approx 15 \text{ мин},$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{1{,}240} \text{ ч} = 2{,}42 \text{ ч} \approx 145 \text{ мин}.$$

При любой скорости между v_- и v_+ расход меньше M/L_1, и модель доплывает, поэтому τ_1 принимает все значения от 15 до 145 мин.

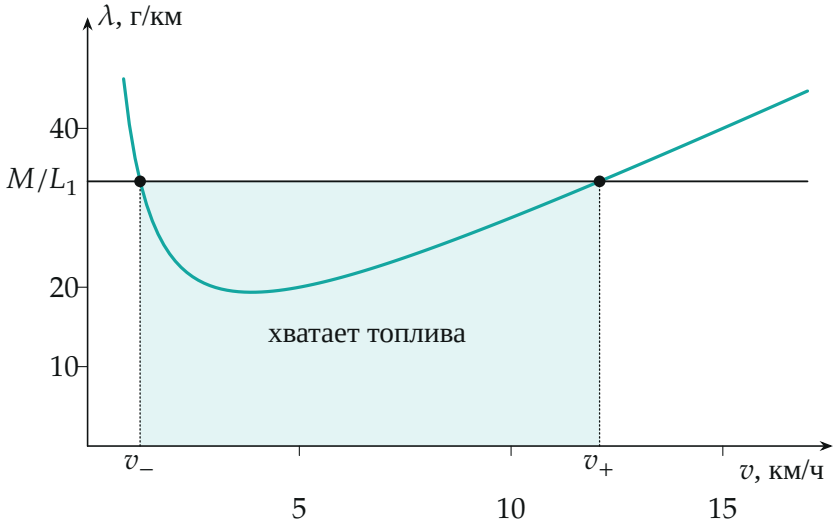


Рис. 2. Топлива на L_1 хватает, пока $\lambda(v) \le M/L_1$: скорость от v_- до v_+ (закрашено).

Обратите внимание: у неподвижной модели расход не нулевой — двигатель «ест» μ_0 на холостом ходу. Именно из-за этого слишком медленное движение невыгодно, и у $\lambda(v)$ есть минимум.

Проверка. Размерность: $[\alpha v] = \text{г}\cdot\text{ч}/\text{км}^2\cdot\text{км}/\text{ч} = \text{г}/\text{км}$, $[\mu_0/v] = \text{г}/\text{ч} : \text{км}/\text{ч} = \text{г}/\text{км}$. Подстановка: $\lambda(5) = 12{,}5 + 7{,}5 = 20$, $\lambda(15) = 37{,}5 + 2{,}5 = 40$ г/км — данные условия. Корни пункта 5: $v_+ v_- = \mu_0/\alpha = 15 = v_0^2$, и $12{,}09 \cdot 1{,}240 = 15{,}0$, верно.

Смысл: быстрая езда сжигает топливо на сопротивление, медленная — на холостой ход; оптимум там, где эти траты на километр равны.

Ответ. 1) $\lambda = \alpha v + \dfrac{\mu_0}{v} = 2{,}5\,v + \dfrac{37{,}5}{v}$ (λ в г/км, v в км/ч); 2) $\tau_x = M/\mu_0 = 160$ мин; 3) $v_0 = \sqrt{\mu_0/\alpha} \approx 3{,}87$ км/ч, $\lambda_0 = 2\sqrt{\alpha\mu_0} \approx 19{,}4$ г/км; 4) $L_0 = M/\lambda_0 \approx 5{,}2$ км, $\tau_0 = M/(2\mu_0) = 80$ мин; 5) от ≈ 15 мин до ≈ 145 мин.