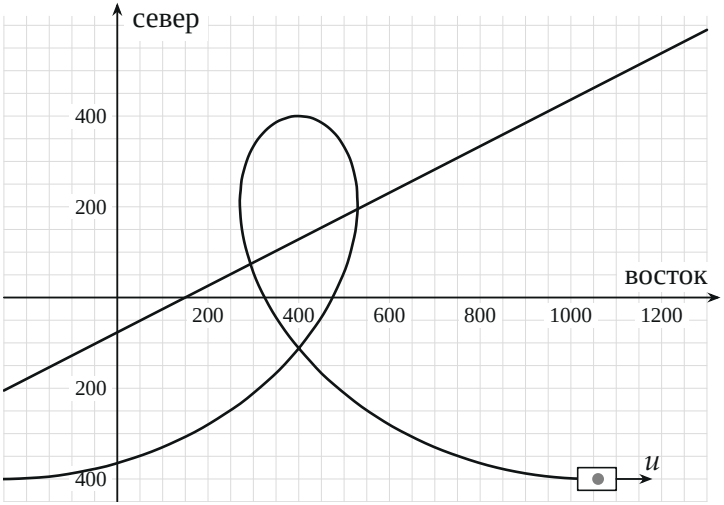
С дымком

Задача 2. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 9 класс, задача 2] «С дымком».

При проведении аэрофотосъёмки была получена фотография, на которой видны два шлейфа дыма от паровозов (рис.). Одной клетке на фотографии соответствует 50 м на местности. Известно, что один паровоз двигался равномерно по кольцевой ветке железной дороги, а другой с такой же скоростью по прямой.



Определите:

1. направление скорости ветра;
2. радиус R кольцевой железной дороги;
3. отношение скорости паровоза v к скорости ветра u;
4. направление прямой железнодорожной ветки (выполнить построения с помощью циркуля и линейки).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «сложение скоростей»: каждая частичка дыма, вылетев из трубы, дальше движется вместе с воздухом, то есть со скоростью ветра $\vec{u}$. Поэтому шлейф — это траектория паровоза, «сдутая» ветром: точка, где паровоз был время Δt назад, сдвинута на $\vec{u}\,\Delta t$. Ветер горизонтален, значит, сдвиг идёт только вдоль одной прямой, и по шлейфу можно восстановить и путь паровоза, и ветер.

Обозначения. Ось x — на восток, y — на север, единица по осям — 100 м (две клетки); $\vec{v}$ — скорость паровоза относительно земли, $\vec{u}$ — скорость ветра; A — самая северная точка петли, B — паровоз сейчас, C и D — точки петли с вертикальной касательной (рис. 2).

1. Где сейчас частичка дыма. Пусть частичка вылетела из трубы в момент t', когда паровоз был в точке $\vec{r}(t')$. Сейчас, в момент t, она в точке

$$\vec{r}_{\text{д}} = \vec{r}(t') + \vec{u}\,(t - t'). \qquad (1)$$

Ветер направлен горизонтально (вдоль оси x или под углом — выясним), но заметим сразу: вдоль направления, перпендикулярного ветру, дым не смещается.

Пункт 1. Ветер. У петлевого шлейфа два «нижних» участка на прямой $y = -400$ м: справа у самого паровоза B и слева, у края фотографии. Это дым, выпущенный в одной и той же точке кольца с интервалом в один оборот: у нижней точки кольца y одинаков, а горизонтальные касательные там — потому что паровоз идёт вдоль x. Значит, ветер сдвигает дым только вдоль оси x, а более старый дым (левый участок) сдвинут на запад. Ветер восточный — дует **с востока на запад**, $\vec{u} = -u\,\vec{e}_x$.

Пункт 2. Радиус кольца. По (1) y-координата частички равна y точки, где её выпустили: ветер вдоль x её не меняет. Значит, размах шлейфа с севера на юг равен диаметру кольца. Северная точка петли A — на $y = 400$ м, паровоз B — на $y = -400$ м (16 клеток):

$$2R = 800 \text{ м}, \qquad R = 400 \text{ м}.$$

Центр кольца — на оси x ($y = 0$), прямо над паровозом: в B скорость паровоза горизонтальна, значит, B — нижняя точка кольца, и центр в точке $(1050;\ 0)$ м. Кольцо показано пунктиром на рис. 2. Паровоз в B идёт на восток (см. рисунок условия), поэтому по кольцу он движется против часовой стрелки.

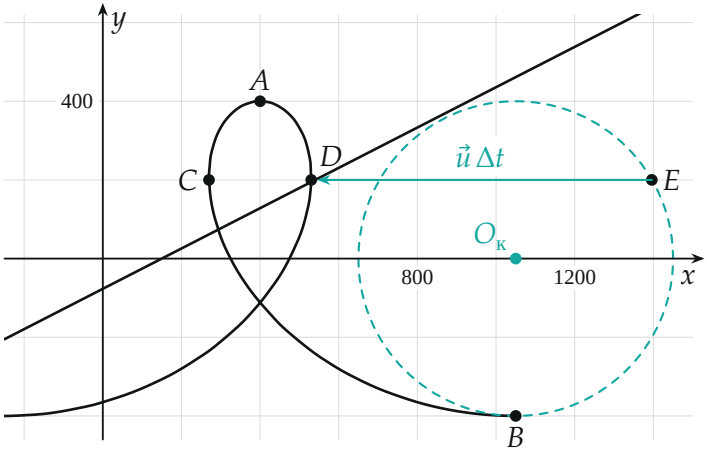


Рис. 2. Шлейф и кольцевая дорога (бирюзовый пунктир, центр $O_к$, радиус $R = 400$ м). Дым из точки кольца E ветер снёс в точку шлейфа D.

Пункт 3. Отношение v/u. Найдём направление касательной к шлейфу. Возьмём две частички, выпущенные с малым интервалом dt'. По (1) разность их положений

$$d\vec{r}_д = \vec{v}\,dt' - \vec{u}\,dt' = -(\vec{u} - \vec{v})\,dt',$$

то есть шлейф в каждой точке направлен вдоль $\vec{u} - \vec{v}$ — скорости ветра в системе отсчёта паровоза в тот момент, когда выпущен этот дым.

В точке D касательная к петле вертикальна. Значит, у $\vec{u} - \vec{v}$ там нет x-проекции: $u_x = v_x$, то есть

$$-u = v_x.$$

Дым в D выпущен в точке кольца E на той же высоте $y_D = 200$ м $= R/2$. Радиус $O_кE$ составляет с горизонталью угол α, $\sin\alpha = \dfrac{R/2}{R} = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ (рис. 3). Скорость паровоза перпендикулярна радиусу, поэтому с вертикалью она составляет тот же угол 30°, и её x-проекция $v_x = -v\sin 30° = -v/2$. Отсюда

$$u = \frac{v}{2}, \qquad \frac{v}{u} = 2.$$

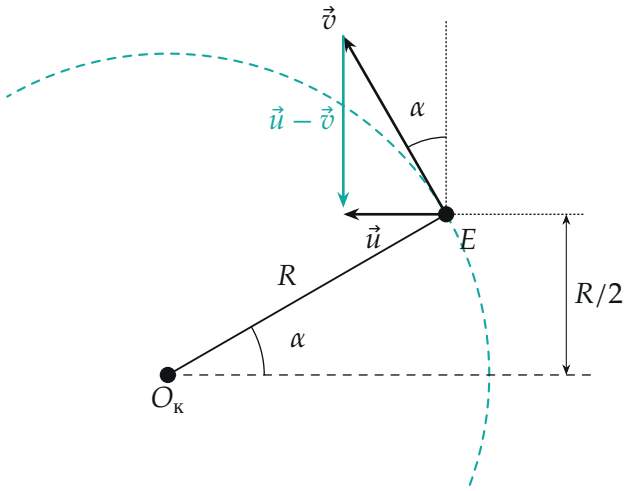


Рис. 3. Точка кольца E, из которой вылетел дым, попавший в D. Скорость ветра относительно паровоза $\vec{u}-\vec{v}$ вертикальна, поэтому $u = v\sin\alpha = v/2$.

Второй способ — по расстояниям. Дым из A выпущен в верхней точке кольца $(1050;\ 400)$, за полоборота до нынешнего момента, то есть за время $\pi R/v$. За это время ветер снёс его на $1050 - 400 = 650$ м:

$$u\,\frac{\pi R}{v} = 650\text{ м} \ \Rightarrow\ \frac{v}{u} = \frac{\pi\cdot 400}{650} \approx 1{,}93.$$

С учётом точности чтения фотографии (полклетки — 25 м) оба способа дают $v/u \approx 2$.

Пункт 4. Прямая ветка. Для паровоза на прямой $\vec{v}$ постоянна, и по (1) все частички лежат на прямой, параллельной $\vec{u}-\vec{v}$ ($\vec{v}$ здесь по модулю тот же, $v = 2u$, но направление неизвестно). Значит, прямой шлейф параллелен $\vec{u}-\vec{v}$. Построение циркулем и линейкой (рис. 4):

1. на прямом шлейфе отмечаем точку L и откладываем от неё на восток отрезок LO произвольной длины — это вектор $\vec{u}$, нарисованный из O: $\overrightarrow{OL} = \vec{u}$;
2. циркулем строим окружность с центром O радиусом $2\,OL$ — концы всех векторов $\vec{v}$ с $v = 2u$;
3. окружность пересекает шлейф в точках M и K. Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$ — искомые скорости: $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \vec{v} - \vec{u}$ лежит на шлейфе,

как и требуется.

Получаются два направления ветки: OM — курс 1 (на северо-восток, 40° к северу от востока) и OK — курс 2 (на запад-юго-запад, 14° к югу от запада). Углы найдены расчётом: шлейф идёт под 27° к востоку, и из $v = 2u$ проекции дают эти два решения. Какое из них настоящее, по фотографии не сказать: шлейф одинаков в обоих случаях.

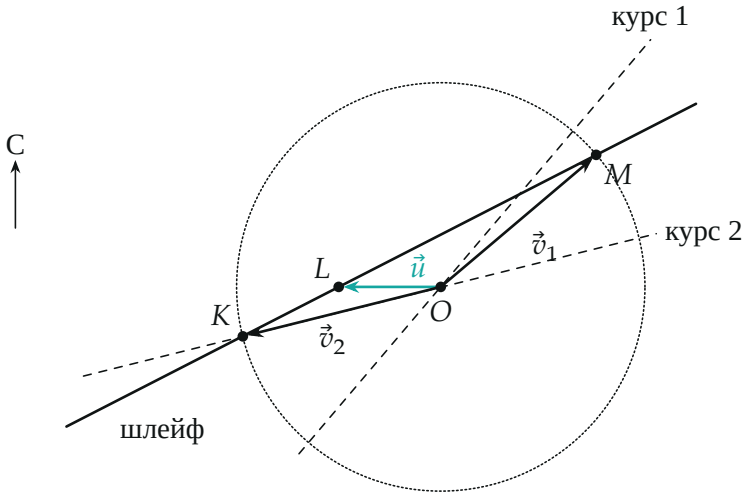


Рис. 4. Построение прямой ветки: $\overrightarrow{OL} = \vec{u}$, окружность радиусом $2u$, точки M и K на шлейфе. Скорость паровоза — $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OM}$ или $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OK}$.

Обратите внимание: шлейф показывает не скорость паровоза, а скорость ветра *относительно паровоза*. Поэтому прямая ветка не параллельна прямому шлейфу, а петля шлейфа — не кольцо дороги.

Проверка. Курс 1: $\vec{v}_1 = (1{,}52;\ 1{,}30)\,u$, $|\vec{v}_1| = 2{,}00\,u$, $\vec{v}_1 - \vec{u} = (2{,}52;\ 1{,}30)u$ — угол 27°, как у шлейфа; курс 2: $\vec{v}_2 = (-1{,}94;\ -0{,}48)u$, $|\vec{v}_2| = 2{,}00\,u$, $\vec{v}_2 - \vec{u} = (-0{,}94;\ -0{,}48)u$ — тоже 27°. Петля: при $v/u = 1{,}93$ точки C и D рассчитываются в $x = 270$ и 530 м — как на фотографии.

Смысл: ветер «растягивает» след паровоза в одну сторону, и форма дыма — это сложение движения паровоза и движения воздуха.

Ответ. 1) ветер дует с востока на запад; 2) $R = 400$ м; 3) $v/u = 2$ (по расстояниям на фото $\approx 1{,}93$); 4) ветка направлена либо на 40° к северу

от востока (курс 1), либо на 14° к югу от запада (курс 2); построение — на рис. 4.