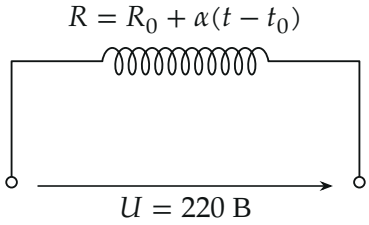
Нелинейная спираль

Задача 3. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 9 класс, задача 3] «Нелинейная спираль».

Сопротивление R спирали зависит от температуры по закону $R = R_0 + \alpha(t - t_0)$, где t — температура спирали, $R_0 = 10$ Ом, $\alpha = 40{,}0 \cdot 10^{-3}$ Ом/°C, $t_0 = 20\,^\circ$C. На спираль подаётся напряжение $U = 220$ В, и за время $\tau_1 = 100$ мкс она нагревается от t_0 до $t_1 = 80\,^\circ$C.

1. До какой температуры t_2 нагреется спираль за время $\tau_2 = 334$ мкс от момента включения?
2. Определите теплоёмкость спирали.

При данных температурах и временах излучением и теплоотдачей можно пренебречь.



Поясняющий рисунок: спираль под постоянным напряжением U; нагреваясь, она увеличивает сопротивление.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «закон сохранения энергии для малого шага». Напряжение постоянно, а сопротивление растёт с температурой, поэтому мощность U^2/R падает, и спираль греется всё медленнее: температура растёт не пропорционально времени. Записываем баланс энергии за малое время $d\tau$ и суммируем — время оказывается площадью под графиком R от температуры.

Обозначения. τ — время от включения, t — температура, C — теплоёмкость спирали (Дж/°C), $x = t - t_0$ — нагрев.

1. Баланс энергии за малое время. Теплоотдачи нет, поэтому по закону сохранения энергии (закон Джоуля–Ленца плюс нагрев) всё выде-

лившееся за $d\tau$ тепло идёт на нагрев спирали на dt:

$$\frac{U^2}{R}\,d\tau = C\,dt \quad\Longrightarrow\quad U^2\,d\tau = C\,R\,dt.$$

Мы умножили на R, чтобы справа стояло $R\,dt$ — полоска площади под графиком $R(t)$ (рис. 1).

2. Суммирование. Складываем от включения ($\tau = 0$, $t = t_0$) до момента τ (температура t). Слева — $U^2\tau$, справа — C, умноженное на площадь трапеции под прямой $R(t)$ от t_0 до t:

$$U^2\tau = C\,S(x), \qquad S(x) = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha x)}{2}\,x = R_0 x + \frac{\alpha x^2}{2}. \qquad (1)$$

Время пропорционально площади: $\tau \propto S$.

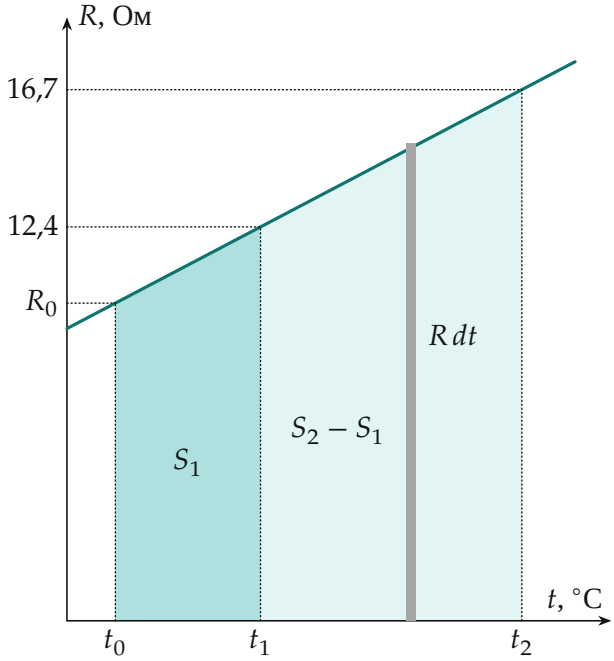


Рис. 1. Сопротивление спирали $R = R_0 + \alpha(t - t_0)$ от температуры. Полоска $R\,dt$ пропорциональна времени $d\tau$, за которое спираль нагрелась на dt; площадь S_1 отвечает τ_1, вся закрашенная площадь S_2 отвечает $\tau_2 = 3{,}34\,\tau_1$.

Пункт 2. Теплоёмкость. Из (1) для τ_1, $x_1 = t_1 - t_0 = 60\,^\circ\text{C}$:

$$S_1 = R_0 x_1 + \frac{\alpha x_1^2}{2} = 10 \cdot 60 + \frac{0{,}04 \cdot 3600}{2} = 672 \text{ Ом} \cdot {}^\circ\text{C},$$

$$C = \frac{U^2 \tau_1}{S_1} = \frac{220^2 \cdot 10^{-4}}{672} = 7{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}/{}^\circ\text{C}.$$

Пункт 1. Температура t_2. Разделим (1) для τ_2 на (1) для τ_1 — C и U сократятся:

$$\frac{S(x_2)}{S_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3{,}34 \;\Rightarrow\; R_0 x_2 + \frac{\alpha x_2^2}{2} = 3{,}34 \cdot 672 = 2244{,}5.$$

Это квадратное уравнение $0{,}02\,x_2^2 + 10\,x_2 - 2244{,}5 = 0$:

$$x_2 = \frac{-R_0 + \sqrt{R_0^2 + 2\alpha \cdot 2244{,}5}}{\alpha} =$$

$$= \frac{-10 + \sqrt{100 + 179{,}6}}{0{,}04} = \frac{-10 + 16{,}72}{0{,}04} = 168\,^\circ\text{C}.$$

Второй корень отрицателен — спираль не может остыть при нагреве, его отбрасываем. Итак, $t_2 = t_0 + x_2 = 188\,^\circ\text{C}$. Заметим, что $R_0 + \alpha x_2 = 16{,}72$ Ом — корень под знаком радикала равен сопротивлению спирали в конце нагрева.

Рис. 2 показывает, как растёт температура со временем: время растёт *быстрее*, чем линейно по температуре, поэтому $t(\tau)$ — выпуклая вверх кривая. Если бы сопротивление не менялось ($R = R_0$), за $3{,}34\,\tau_1$ спираль нагрелась бы на $3{,}34 \cdot 60 \cdot \frac{672}{600} = 224\,^\circ\text{C}$, до $244\,^\circ\text{C}$; рост сопротивления «съедает» больше $50\,^\circ\text{C}$.

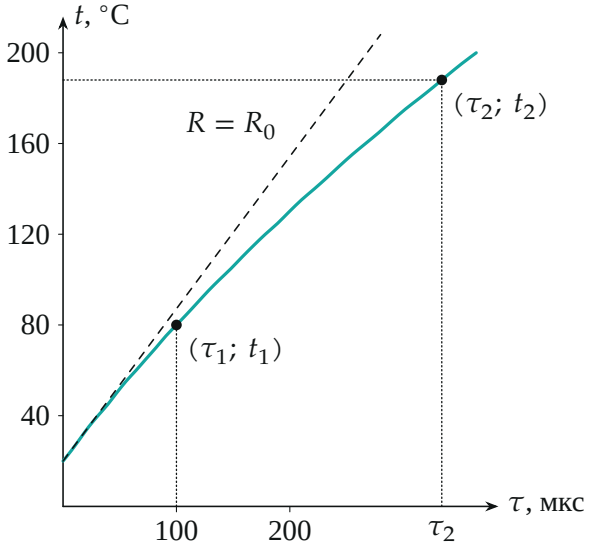


Рис. 2. Температура спирали от времени (бирюзовая, по формуле (1)). Пунктир — нагрев, если бы сопротивление оставалось R_0.

Обратите внимание: мощность нельзя считать постоянной и брать «среднюю по температуре» — она меняется, и время выражается через площадь под $R(t)$, а не под $1/R$. Если бы ток был задан постоянным (а не напряжение), всё было бы наоборот.

Проверка. Размерность: $[U^2\tau/S] = \text{В}^2\cdot\text{с}/(\text{Ом}\cdot{}^\circ\text{C}) = \text{Дж}/{}^\circ\text{C}$. Обратная подстановка: $S(168) = 1680 + 0{,}02\cdot 168^2 = 1680 + 564{,}5 = 2244{,}5 = 3{,}34\,S_1$ — верно. Предел $\alpha \to 0$: из (1) $x \propto \tau$, как и должно быть для постоянной мощности.

Смысл: нагреваясь, спираль сама уменьшает свою мощность, поэтому чем горячее, тем медленнее она греется.

Ответ. 1) $t_2 = t_0 + \dfrac{-R_0 + \sqrt{R_0^2 + 2\alpha S_1\tau_2/\tau_1}}{\alpha} = 188\,^\circ\text{C}$, где $S_1 = R_0(t_1 - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)^2$; 2) $C = \dfrac{U^2\tau_1}{S_1} \approx 7{,}2\cdot 10^{-3}$ Дж/°C.