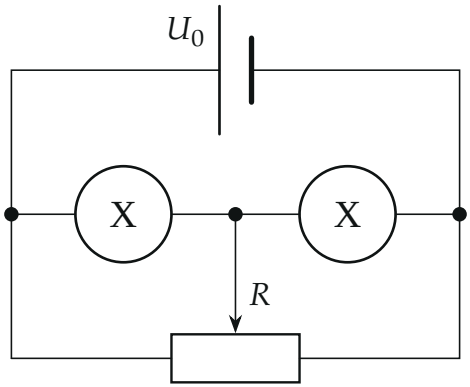
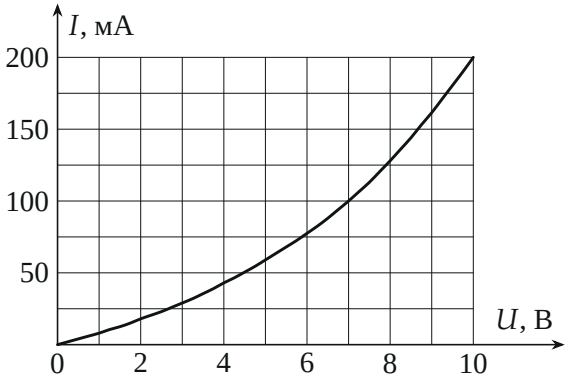
Два нелинейных элемента

Задача 4. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 9 класс, задача 4] «Два нелинейных элемента».

Электрическая цепь состоит из двух одинаковых нелинейных элементов X, потенциометра, сопротивление между неподвижными контактами которого $R = 100$ Ом, и идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 10$ В (рис.). Вольт-амперная характеристика элемента X приведена на рисунке справа.





Определите:

1. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при крайних положениях движка потенциометра.

2. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра в центре.
3. Минимальную суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах. При каких положениях движка потенциометра эта мощность достигается? Ответ обоснуйте.
4. Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра, в котором сопротивление его левого плеча равно 25 Ом.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «нелинейный элемент в цепи — графическое решение». Движок делит потенциометр на два плеча, и каждое плечо оказывается подключено параллельно «своему» элементу X. Батарейка держит на двух последовательных участках сумму напряжений U_0; как она делится, решает закон сохранения заряда в средней точке. Мощность на элементах зависит только от того, как поделилось напряжение, — это ключ к пункту 3.

Обозначения. r_1 и $r_2 = R - r_1$ — сопротивления левого и правого плеч потенциометра; U_1 и U_2 — напряжения на левом и правом элементах; $I(U)$ — ВАХ элемента; W — суммарная мощность на элементах.

1. Эквивалентная схема. Средняя точка M (между элементами) соединена с движком. Поэтому левый элемент включён параллельно левому плечу r_1, правый — параллельно правому r_2, а эти два участка соединены последовательно и подключены к батарейке (рис. 1). Отсюда два уравнения. Закон Кирхгофа для напряжений (обход по контуру с батарейкой):

$$U_1 + U_2 = U_0. \qquad (1)$$

Закон сохранения заряда для узла M: всё, что пришло через левый участок, уходит через правый:

$$I(U_1) + \frac{U_1}{r_1} = I(U_2) + \frac{U_2}{r_2}. \qquad (2)$$

Мощность на элементах $W = U_1 I(U_1) + U_2 I(U_2)$; потенциометр в неё не входит.

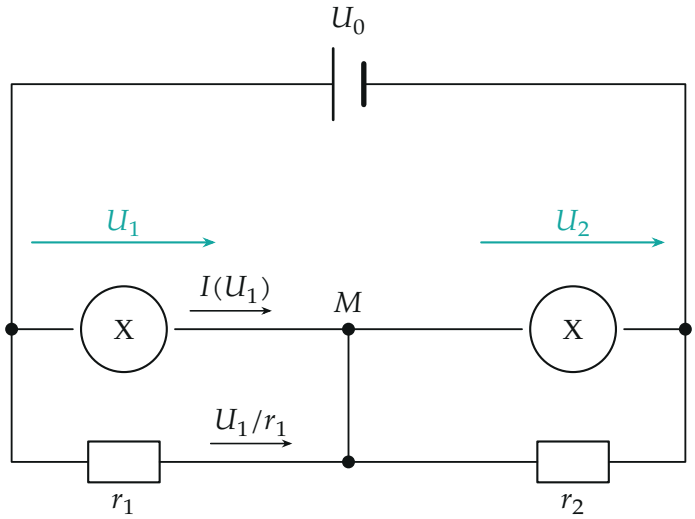


Рис. 1. Эквивалентная схема: каждый элемент X шунтирован своим плечом потенциометра. Бирюзовые стрелки — напряжения на участках, чёрные — токи в левый участок.

Пункт 1. Крайние положения. Движок у левого конца: $r_1 = 0$, левый элемент закорочен, $U_1 = 0$ и тока через него нет. Всё напряжение — на правом: $U_2 = U_0 = 10$ В, по ВАХ $I(10\text{ В}) = 200$ мА:

$$W_1 = U_0\, I(U_0) = 10 \cdot 0{,}200 = 2{,}0\text{ Вт}.$$

У правого конца — то же самое зеркально, $W_1 = 2{,}0$ Вт.

Пункт 2. Движок в центре. $r_1 = r_2 = 50$ Ом, схема симметрична: при $U_1 = U_2 = 5$ В уравнение (2) выполнено тождественно. По ВАХ $I(5\text{ В}) = 60$ мА:

$$W_2 = 2 \cdot \frac{U_0}{2}\, I\!\left(\frac{U_0}{2}\right) = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}060 = 0{,}60\text{ Вт}.$$

Пункт 3. Минимум мощности. По (1) $U_2 = U_0 - U_1$, поэтому мощность зависит от одной переменной:

$$W(U_1) = f(U_1) + f(U_0 - U_1), \qquad f(U) = U\, I(U).$$

При перемещении движка от левого конца к правому U_1 непрерывно растёт от 0 до U_0 (чем больше r_1, тем хуже левый участок проводит ток и тем большая доля напряжения на нём падает). Значит, достаточно найти минимум $W(U_1)$ на отрезке $[0;\ U_0]$.

Функция $f(U) = UI(U)$ выпуклая вниз: ВАХ возрастает и сама выпукла вниз, поэтому f растёт быстрее, чем линейно. Сравним $U_1 = 5+\delta$ и центр. Мощность на одном элементе растёт на $f(5+\delta) - f(5)$, на другом падает на $f(5) - f(5-\delta)$, и прирост больше убыли, потому что наклон f справа больше:

$$W(5+\delta) - W(5) = [f(5+\delta) - f(5)] - [f(5) - f(5-\delta)] > 0.$$

Иначе: при сдвиге один элемент получает напряжение δ там, где ВАХ круче, а другой теряет δ там, где она пологая. Поэтому минимум — при $U_1 = U_2 = U_0/2$, то есть только в центральном положении движка: $W_{\min} = W_2 \approx 0{,}60$ Вт. График $W(U_1)$, построенный по ВАХ, — на рис. 2.

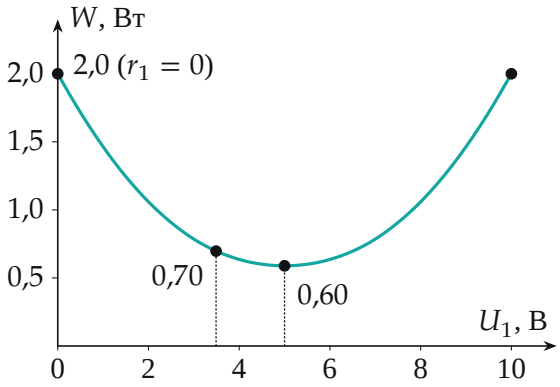


Рис. 2. Суммарная мощность на элементах от напряжения на левом элементе. Минимум — в центре ($U_1 = 5$ В); точка $U_1 = 3{,}5$ В — пункт 4.

Пункт 4. Левое плечо 25 Ом. Теперь $r_1 = 25$ Ом, $r_2 = 75$ Ом. Под-

ставим $U_2 = U_0 - U_1$ в (2):

$$\underbrace{I(U_1) + \frac{U_1}{r_1}}_{\text{левый участок}} = \underbrace{I(U_0 - U_1) + \frac{U_0 - U_1}{r_2}}_{\text{правый участок}}.$$

ВАХ задана графиком, поэтому решаем графически: строим обе части как функции U_1 (рис. 3). Левая часть растёт (ВАХ плюс прямая $U_1/25$), правая убывает (ВАХ, отражённая относительно $U_1 = 5$ В, плюс прямая $(10 - U_1)/75$). Пересечение:

$$U_1 \approx 3{,}5 \text{ В}, \quad U_2 \approx 6{,}5 \text{ В}, \quad I(U_1) \approx 35 \text{ мА}, \quad I(U_2) \approx 88 \text{ мА}.$$

Проверка подстановкой: слева $35 + 140 = 175$ мА ($U_1/r_1 = 140$ мА), справа $88 + 87 = 175$ мА ($U_2/r_2 = 87$ мА) — сходится. Мощность

$$W_4 = U_1 I(U_1) + U_2 I(U_2) =$$

$$= 3{,}5 \cdot 0{,}035 + 6{,}5 \cdot 0{,}088 \approx 0{,}12 + 0{,}57 = 0{,}70 \text{ Вт}.$$

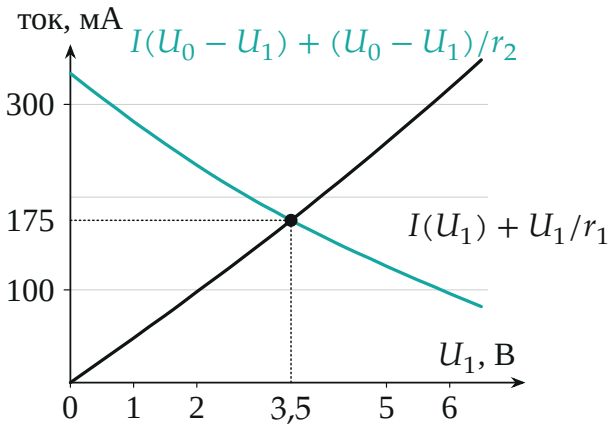


Рис. 3. Графическое решение уравнения (2) при $r_1 = 25$ Ом, $r_2 = 75$ Ом: ток через левый участок (чёрная) и через правый (бирюзовая).

Обратите внимание: хотя потенциометр сам потребляет энергию, в вопросе только мощность на элементах X. При крайнем положении по-

тенциометр (100 Ом) параллелен работающему элементу и потребляет ещё 1 Вт, но в W_1 это не входит.

Проверка. Размерность $[UI] = $ Вт. Предельные случаи укладываются в одну картину: $r_1 \to 0$ даёт $U_1 \to 0$ и $W \to 2{,}0$ Вт, $r_1 = 50$ Ом — $U_1 = 5$ В и минимум 0,60 Вт, промежуточное $r_1 = 25$ Ом — промежуточное 0,70 Вт. Численное решение (2) по оцифрованной ВАХ даёт $U_1 = 3{,}49$ В и $W = 0{,}697$ Вт.

Смысл: из-за изогнутой ВАХ элементам «выгодно» делить напряжение поровну — любой перекос увеличивает суммарную мощность.

Ответ. 1) $W_1 = U_0 I(U_0) = 2{,}0$ Вт; 2) $W_2 = U_0 I(U_0/2) \approx 0{,}60$ Вт; 3) $W_{\min} \approx 0{,}60$ Вт — только при движке в центре; 4) $W_4 \approx 0{,}70$ Вт ($U_1 \approx 3{,}5$ В, $U_2 \approx 6{,}5$ В).