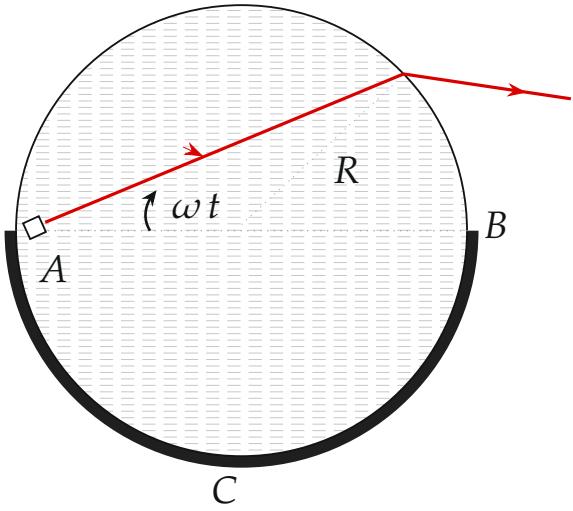
Лазер в сосуде

Задача 5. [ВсОШ 2016/17, заключительный этап, 9 класс, задача 5] «Лазер в сосуде».

Внутри стеклянного тонкостенного цилиндрического сосуда радиуса R вблизи его стенки в точке A расположен микролазер, размеры которого гораздо меньше R. Сосуд заполнен водой, а снаружи находится воздух. Половина внутренней поверхности сосуда, соответствующая дуге ACB, зачернена и поглощает свет. Изначально луч лазера направлен в точку B.

Лазер начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки в плоскости рисунка вокруг оси, проходящей через точку A. Показатель преломления воды $n = 4/3$.



1. Через какое время τ луч перестанет выходить из сосуда?
2. Чему будет равна скорость «зайчика» на зачернённой поверхности цилиндра в момент времени $1{,}5\tau$ от начала его движения?

Примечание. Вам может потребоваться закон Снелла: $n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2$, где n_1 и n_2 — показатели преломления света в первой и второй среде, φ_1 и φ_2 — углы падения и преломления.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «полное внутреннее отражение + геометрия окружности». Лазер поворачивается, и луч падает на

верхнюю (прозрачную) стенку всё более наклонно. Пока угол падения меньше предельного, часть света выходит наружу. Когда он превысит предельный, луч целиком отражается и бежит внутри сосуда ломаной, вписанной в окружность, пока не попадёт на зачернённую половину. Главная геометрия: все звенья ломаной — равные хорды, и угол падения на каждом отражении один и тот же.

Обозначения. O — центр сосуда; $\beta = \omega t$ — угол поворота лазера от направления AB; $A_1, A_2, \ldots$ — точки, где луч касается стенки; γ — центральный угол, опирающийся на одно звено ломаной; φ — угловое положение зайчика на окружности.

Пункт 1. Когда луч перестанет выходить.

1. Угол падения. Луч из A идёт под углом β к диаметру AB, а диаметр — это радиус AO. Треугольник AOA_1 равнобедренный ($OA = OA_1 = R$), поэтому угол между лучом и радиусом OA_1 в точке A_1 тоже равен β (рис. 1). Радиус — нормаль к стенке, значит, β и есть угол падения на стенку.

2. Предельный угол. Стенка тонкая, её плоскопараллельный слой направление луча в воздухе не меняет, поэтому достаточно закона Снелла для границы вода–воздух: $n \sin\beta = 1 \cdot \sin\varphi_2$. Луч перестаёт выходить, когда угол преломления дошёл до 90°:

$$\sin\beta_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}, \qquad \beta_{\text{пр}} = 48{,}6^\circ = 0{,}848 \text{ рад}.$$

3. Время. Лазер поворачивается равномерно, $\beta = \omega t$:

$$\tau = \frac{\beta_{\text{пр}}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{1}{n} \approx \frac{0{,}85}{\omega}.$$

При $t < \tau$ первая точка падения A_1 лежит на верхней, прозрачной половине: её угловая координата $2\beta < 180^\circ$ (рис. 1).

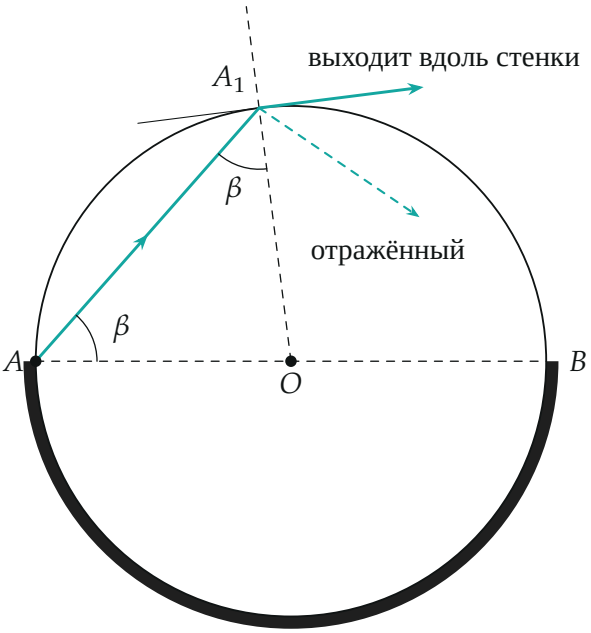


Рис. 1. Момент $t = \tau$: угол падения β на стенку равен углу поворота лазера и стал предельным, преломлённый луч идёт по касательной. Тонкая линия — касательная в A_1, пунктир от O — нормаль.

Пункт 2. Скорость зайчика при $t = 1{,}5\tau$.

4. Ломаная внутри. Теперь $\beta = 1{,}5 \cdot 48{,}6^\circ = 72{,}9^\circ > \beta_{\text{пр}}$, свет полностью отражается. При отражении угол отражения равен углу падения β, так что следующее звено — опять хорда, составляющая с радиусом угол β, и все звенья равны (рис. 2). Центральный угол, опирающийся на одно звено, из равнобедренного треугольника AOA_1:

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 145{,}8^\circ = 34{,}2^\circ.$$

Угол падения в каждой следующей точке тот же, и он больше предельного — свет не выходит, пока не попадёт на зачернённую половину.

5. Сколько отражений. Точка A_k отстоит от A по окружности (через верх) на угол $k\gamma$. Верхняя половина — это $k\gamma < 180^\circ$:

$$\frac{180^\circ}{\gamma} = \frac{180}{34{,}2} = 5{,}26 \quad \Rightarrow \quad 5\gamma = 171^\circ < 180^\circ < 6\gamma = 205^\circ.$$

Значит, луч отражается в точках $A_1, \ldots, A_5$ и шестым звеном попадает на зачернённую дугу в точке A_6 — это и есть зайчик.

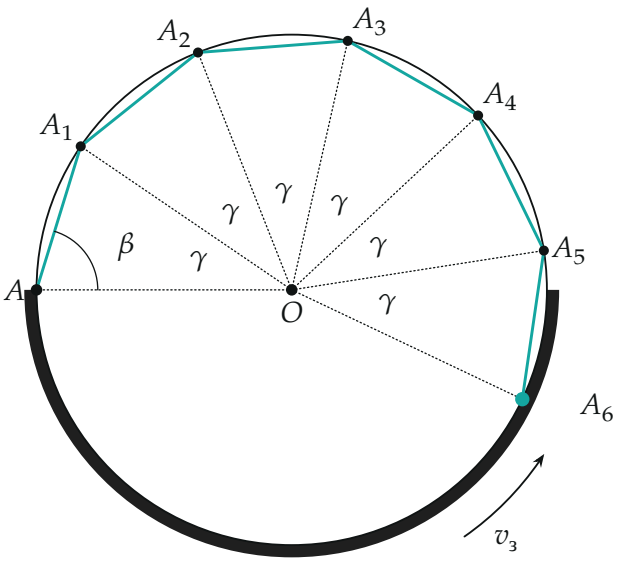


Рис. 2. Момент $1{,}5\tau$: $\beta = 72{,}9°$, ломаная из шести равных хорд, каждая опирается на центральный угол $\gamma = 34{,}2°$. Зайчик A_6 — на зачернённой половине.

6. Координата зайчика. Угловое расстояние зайчика от A (через верх):

$$\varphi = 6\gamma = 6\,(180° - 2\omega t) = 1080° - 12\,\omega t.$$

Формула верна, пока число отражений не меняется, то есть в окрестности $t = 1{,}5\tau$ ($5\gamma < 180° < 6\gamma$ выполняется с запасом). Угловая скорость зайчика — скорость изменения φ:

$$\omega_з = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = 12\,\omega,$$

φ уменьшается, то есть зайчик бежит по зачернённой дуге от C к B — против часовой стрелки, как и вращается лазер. Линейная скорость точ-

ки на окружности радиуса R:

$$v_з = \omega_з R = 12\,\omega R.$$

Обратите внимание: скорость зайчика не равна ωR и даже $2\omega R$ (как было бы для луча, падающего на стенку сразу): каждое из шести звеньев поворачивается вдвое быстрее лазера, и их повороты складываются — $6\cdot 2\omega = 12\omega$. При другом числе отражений N ответ был бы $2(N+1)\omega R$.

Проверка. Размерность: $[\omega R]$ = м/с. Частный случай без отражений: зайчик в A_1, $\varphi = \gamma = 180^\circ - 2\omega t$, скорость $2\omega R$ — известный результат «вписанный угол вдвое меньше центрального». Числа: $\beta = 72{,}9^\circ > 48{,}6^\circ$ — отражение полное, A_6 на угловой координате -25° (ниже диаметра AB) — на зачернённой дуге.

Смысл: ломаная из $N+1$ хорд «умножает» поворот лазера, поэтому зайчик бежит во много раз быстрее, чем поворачивается лазер.

Ответ. 1) $\tau = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{1}{n} \approx \dfrac{0{,}85}{\omega}$ (лазер повернулся на $48{,}6^\circ$); 2) $v_з = 12\,\omega R$.