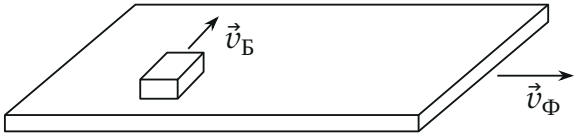
Просто трение

Задача 1. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Просто трение».

На гладкой горизонтальной поверхности лежит лист фанеры, на котором находится стальной брусок. Одновременно листу фанеры и бруску сообщают скорости v и $\sqrt{3}\,v$ относительно льда, причём их направления взаимно перпендикулярны. В процессе дальнейшего движения из-за наличия трения скорости бруска и доски изменяются. Определите минимальные скорости фанеры и бруска (относительно льда) в процессе их движения. Масса бруска равна массе фанеры.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Брусок скользит по фанере, и пара сил трения тормозит их относительное движение. Внешних горизонтальных сил нет (лёд гладкий), поэтому импульс системы сохраняется, а скорость центра масс постоянна. Главная идея — следить не за силами, а за концами векторов скоростей на плоскости скоростей: они движутся по одной прямой навстречу друг другу. Это задача на сохранение импульса и поиск минимума расстояния от точки до отрезка.

Обозначения. m — масса бруска и фанеры; $\vec{v}_Б$, $\vec{v}_Ф$ — их скорости относительно льда; $\vec{u} = \vec{v}_Б - \vec{v}_Ф$ — скорость бруска относительно фанеры; $\vec{F}$ — сила трения, действующая на брусок. На плоскости скоростей (рис. 3) из начала O отложены $\vec{OA} = \vec{v}_Б$ и $\vec{OB} = \vec{v}_Ф$ в начальный момент.

1. Куда направлены силы. Сила трения скольжения на брусок направлена против его скорости относительно фанеры, $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{u}$; по третьему закону Ньютона на фанеру действует $-\vec{F}$ (рис. 2). Вертикальные силы (тяжести, реакции льда и фанеры) скоростей в горизонтальной плоскости не меняют.

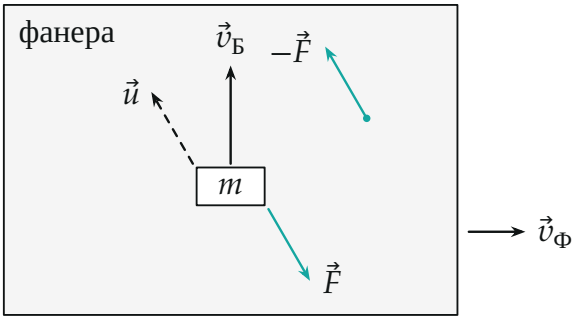


Рис. 2. Вид сверху. Брусок движется относительно фанеры со скоростью $\vec{u}$; трение на брусок $\vec{F}$ — против $\vec{u}$, на фанеру $-\vec{F}$ — вдоль $\vec{u}$.

2. Как меняются скорости. Второй закон Ньютона для бруска и для фанеры за малый промежуток dt:

$$m\,d\vec{v}_Б = \vec{F}\,dt, \qquad m\,d\vec{v}_Ф = -\vec{F}\,dt.$$

Массы равны, поэтому $d\vec{v}_Б = -d\vec{v}_Ф$: конец вектора скорости бруска и конец вектора скорости фанеры сдвигаются на равные и противоположные отрезки. Сумма $\vec{v}_Б + \vec{v}_Ф = 2\vec{v}_ц$ не меняется — это закон сохранения импульса системы брусок + фанера. На плоскости скоростей середина M отрезка AB неподвижна.

Относительная скорость меняется так: $d\vec{u} = d\vec{v}_Б - d\vec{v}_Ф = 2\vec{F}\,dt/m$, а $\vec{F}$ направлена против $\vec{u}$. Значит, $\vec{u}$ уменьшается по модулю, не поворачиваясь, и сила трения всё время направлена вдоль одной прямой AB. Концы векторов скоростей ползут по отрезку AB навстречу друг другу, к его середине M (рис. 3), и останавливаются там, когда $\vec{u} = 0$: дальше брусок и фанера едут вместе со скоростью $\vec{OM}$.

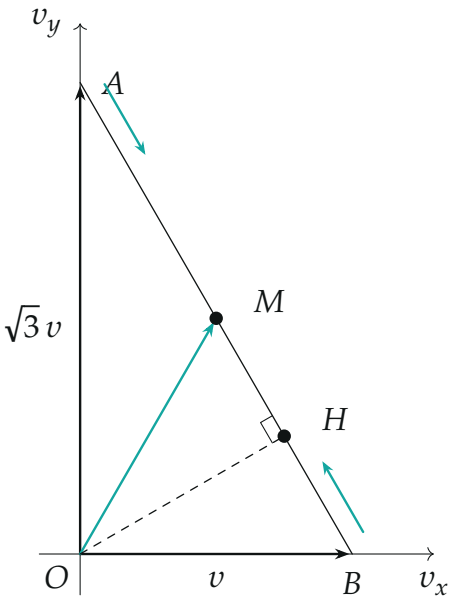


Рис. 3. Плоскость скоростей. Конец скорости бруска идёт от A к середине M, конец скорости фанеры — от B к M (короткие бирюзовые стрелки). $\vec{OM}$ — общая конечная скорость, $OH \perp AB$.

3. Минимальная скорость бруска. Длины $OA = \sqrt{3}\,v$, $OB = v$, угол $AOB = 90°$, поэтому $AB = \sqrt{3v^2 + v^2} = 2v$, а OM — медиана к гипотенузе:

$$OM = \frac{AB}{2} = v.$$

Расстояние от O до точек прямой AB тем меньше, чем ближе точка к основанию перпендикуляра H. В прямоугольном треугольнике AOB проекция катета OB на гипотенузу $BH = OB^2/AB = v/2$, а $BM = v$. Значит, H лежит между B и M, и конец скорости бруска на всём пути от A до M к H только приближается: скорость бруска монотонно убывает и минимальна в конце,

$$v_{\text{Б min}} = OM = v.$$

4. Минимальная скорость фанеры. Конец скорости фанеры идёт от B к M и проходит точку H. До неё скорость фанеры уменьшается, после — снова растёт до $OM = v$ (рис. 4). Минимум — длина перпендикуляра,

высоты прямоугольного треугольника:

$$v_{\Phi\,\min} = OH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{\sqrt{3}\,v \cdot v}{2v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v.$$

В этот момент сила трения на фанеру, направленная вдоль AB, перпендикулярна её скорости $\vec{OH}$: работа силы трения над фанерой равна нулю, и скорость не меняется — это и есть признак минимума.

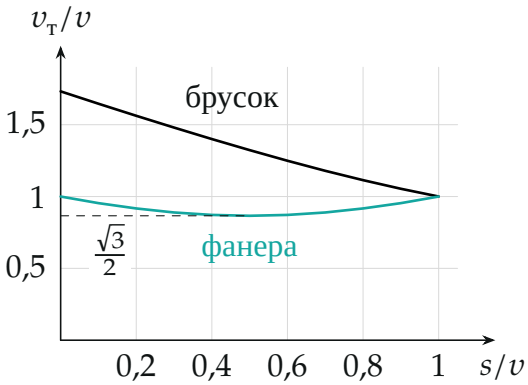


Рис. 4. Модули скоростей бруска и фанеры (в единицах v) в зависимости от пути s конца вектора скорости по отрезку AB: s растёт от 0 до v с течением времени. Брусок монотонно тормозится до v; фанера проходит минимум $\frac{\sqrt{3}}{2}v$ в середине пути.

Обратите внимание. Минимум скорости фанеры наступает не в конце, а во время скольжения: дальше трение снова её разгоняет. Ответ «обе скорости минимальны, когда сравнялись» неверен.

Проверка. Конечная скорость по закону сохранения импульса: $2m\vec{v}_ц = m\vec{v}_{Б0} + m\vec{v}_{Ф0}$, $v_ц = \frac{1}{2}\sqrt{3v^2 + v^2} = v$ — совпадает с OM. Оба минимума не больше начальных скоростей ($v < \sqrt{3}\,v$, $\frac{\sqrt{3}}{2}v < v$), как и должно быть. Смысл: трение не может замедлить общее движение системы, оно только выравнивает скорости тел.

Ответ. Минимальная скорость бруска относительно льда v (после окончания скольжения), минимальная скорость фанеры $\frac{\sqrt{3}}{2}\,v \approx 0{,}87\,v$ (во время скольжения).