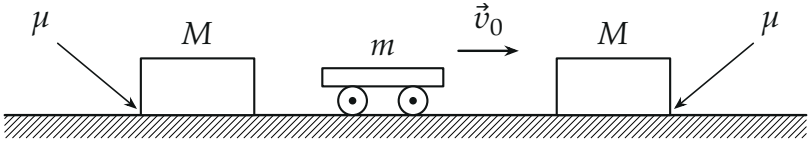
Расталкивание

Задача 2. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Расталкивание».

На горизонтальной поверхности покоятся два бруска массой M каждый. Между брусками помещают тележку массой m ($m = M/3$) и сообщают ей начальную скорость v_0. Найдите, насколько сдвинутся бруски в результате абсолютно упругих столкновений с тележкой, если за время между столкновениями они успевают останавливаться. Время соударения тележки с брусками бесконечно мало. Коэффициенты трения между брусками и полом равны μ. Ускорение свободного падения — g.



▲ **Решение. Что происходит.** Тележка без трения бегает между брусками и при каждом упругом ударе отдаёт бруску часть энергии, а сама отскакивает назад с меньшей скоростью. Удар мгновенный, поэтому трение за время удара импульса не меняет, и для пары тележка + брусок выполняются законы сохранения импульса и энергии. После удара брусок тормозится трением до остановки, и его путь находится по теореме об изменении кинетической энергии. Скорости тележки образуют геометрическую прогрессию, а сдвиги брусков — суммы геометрических прогрессий.

Обозначения. Ось x — вправо. v_n — проекция скорости тележки после n-го удара, u_n — скорость бруска сразу после n-го удара; нечётные удары — о правый брусок, чётные — о левый. $L_{\text{пр}}$, $L_{\text{л}}$ — полные сдвиги брусков.

1. Один упругий удар. Тележка со скоростью v налетает на покоящийся брусок (рис. 2). Закон сохранения импульса системы тележка + брусок за время удара (внешняя сила трения конечна, а время удара бесконечно мало) и закон сохранения кинетической энергии (удар абсолют-

но упругий):

$$mv = mv' + Mu, \qquad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Перенесём слагаемые с m влево: $m(v - v') = Mu$ и $m(v - v')(v + v') = Mu^2$. Делим второе на первое: $v + v' = u$. Подставляем в первое:

$$u = \frac{2m}{m + M}\, v = \frac{v}{2}, \qquad v' = \frac{m - M}{m + M}\, v = -\frac{v}{2} \qquad (m = M/3).$$

Минус: тележка отскакивает назад с половиной прежней скорости, а брусок уезжает вперёд тоже с половиной.

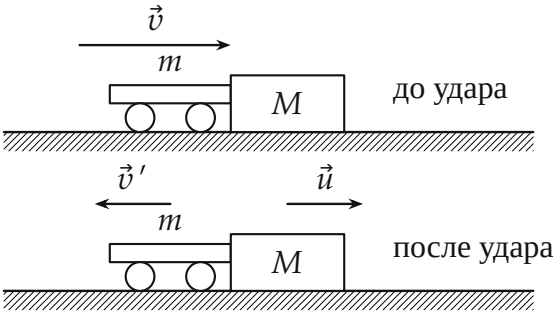


Рис. 2. Упругий удар тележки о покоящийся брусок при $m = M/3$: брусок получает $u = v/2$, тележка отскакивает с $v' = v/2$ назад. Длины стрелок — в масштабе.

2. Цепочка ударов. Брусок к следующему удару успевает остановиться (так сказано в условии), поэтому каждый удар — о покоящийся брусок, и формулы пункта 1 работают каждый раз (рис. 3). Модули скоростей тележки после ударов: $v_0/2$, $v_0/4$, $v_0/8$, ..., а скорость бруска после n-го удара

$$u_n = \frac{v_0}{2^n}: \qquad \text{правый: } \frac{v_0}{2}, \frac{v_0}{8}, \frac{v_0}{32}, \ldots; \qquad \text{левый: } \frac{v_0}{4}, \frac{v_0}{16}, \frac{v_0}{64}, \ldots$$

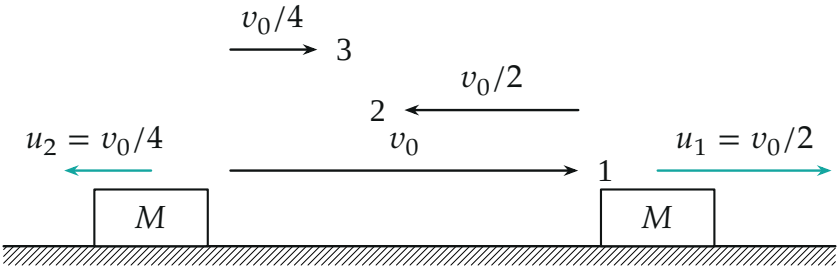


Рис. 3. Первые удары: чёрные стрелки — скорости тележки на участках 1, 2, 3 между ударами (длины в масштабе); тележка отдаёт брускам половину своей скорости; бирюзой — скорости брусков сразу после удара.

3. Сдвиг одного бруска после удара. Брусок со скоростью u скользит до остановки; работает только сила трения μMg (тележка уже далеко). Теорема об изменении кинетической энергии бруска от удара до остановки:

$$0 - \frac{Mu^2}{2} = -\mu Mg\, s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{u^2}{2\mu g}.$$

Каждый следующий сдвиг бруска в $4^2 = 16$ раз меньше предыдущего: скорость бруска от удара к удару о него падает в 4 раза.

4. Полные сдвиги. Суммируем бесконечно убывающие геометрические прогрессии со знаменателем $1/16$:

$$L_{\text{пр}} = \frac{1}{2\mu g}\left(\frac{v_0^2}{4} + \frac{v_0^2}{64} + \ldots\right) = \frac{v_0^2}{8\mu g} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{2v_0^2}{15\mu g},$$

$$L_{\text{л}} = \frac{1}{2\mu g}\left(\frac{v_0^2}{16} + \frac{v_0^2}{256} + \ldots\right) = \frac{v_0^2}{32\mu g} \cdot \frac{16}{15} = \frac{v_0^2}{30\mu g}.$$

5. Второй способ — через энергию. После каждого удара тележка сохраняет $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ своей кинетической энергии, а $\frac{3}{4}$ уходит бруску (рис. 4). Энергия бруска, полученная при ударе $n+1$, в 4 раза меньше, чем при ударе n, поэтому каждый сдвиг левого бруска в 4 раза меньше предшествующего сдвига правого: $L_{\text{л}} = L_{\text{пр}}/4$. Вся начальная энергия

тележки в конце уходит в работу трения:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu Mg\,(L_{\text{пр}} + L_{\text{л}}) = \frac{5}{4}\,\mu Mg\,L_{\text{пр}} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{пр}} = \frac{2mv_0^2}{5\mu Mg} = \frac{2v_0^2}{15\mu g}.$$

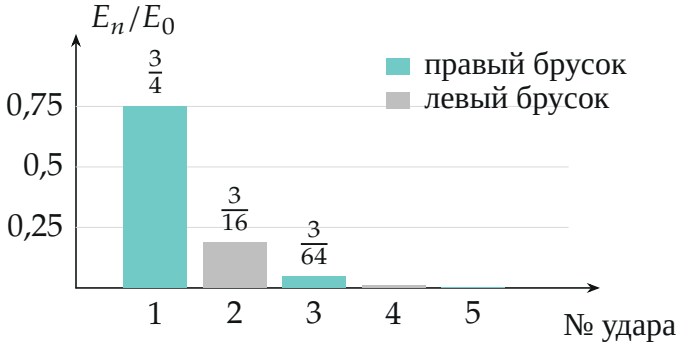


Рис. 4. Доля начальной энергии тележки $E_0 = mv_0^2/2$, которую получает брусок при n-м ударе: каждый раз в 4 раза меньше. Правому достаются удары $1, 3, 5, \ldots$ — в сумме $\frac{4}{5}E_0$, левому — $\frac{1}{5}E_0$.

Обратите внимание. Сдвиги считаются по энергии брусков, а не по скоростям: путь до остановки пропорционален u^2, поэтому знаменатель прогрессии сдвигов $1/16$, а не $1/4$.

Проверка. Размерность: $[v_0^2/(\mu g)] = \dfrac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}$. Энергетический баланс: $\mu Mg\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{30}\right)\frac{v_0^2}{\mu g} = \frac{Mv_0^2}{6} = \frac{mv_0^2}{2}$ — вся энергия тележки ушла в тепло. Смысл: правый брусок получает первый, самый сильный удар и уезжает вчетверо дальше левого.

Ответ. Правый брусок сдвинется на $L_{\text{пр}} = \dfrac{2v_0^2}{15\mu g}$, левый — на $L_{\text{л}} = \dfrac{v_0^2}{30\mu g}$.