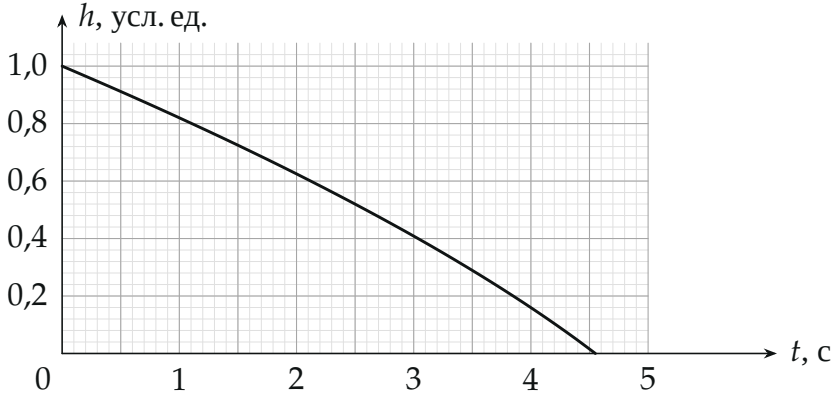
Из глубин...

Задача 3. [ВсОШ 2017/18, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Из глубин...».

Со дна глубокого озера всплывает пузырёк воздуха. На него действует сила сопротивления $F = krv$, где r — радиус пузырька, v — его скорость, k — постоянная. Вблизи дна радиус пузырька $r_0 = 1{,}0$ мм. На рис. 1 представлен график зависимости глубины h, на которой находится пузырёк, от времени t, прошедшего от начала его движения.



1. Какова глубина озера?
2. За какое время τ_1 всплывёт пузырёк, радиус которого у дна равен $r_1 = 0{,}5$ мм?
3. За какое время τ_2 пузырёк, радиус которого у дна водоёма равен $r_0 = 1{,}0$ мм, всплывёт со дна водоёма глубиной $H = 10$ м?

Примечание 1. Давление водяных паров в пузырьке, поверхностное натяжение воды, изменение формы пузырька и изменение температуры воздуха в пузырьке не учитывайте.

Примечание 2. Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, атмосферное давление $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, $g = 10$ м/с^2, объём пузырька $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

▲ **Решение. Что происходит.** Пузырёк лёгкий, и разгоняется он почти мгновенно: всё время сила Архимеда уравновешена силой сопротивления, и скорость определяется радиусом. При подъёме давление воды

падает, воздух расширяется (температура постоянна — закон Бойля — Мариотта), радиус и скорость растут. Поэтому график $h(t)$ — не прямая: у поверхности он круче. Отношение наклонов в начале и в конце графика и даёт глубину озера.

Обозначения. h_0 — глубина озера, $v(h)$ и $r(h)$ — скорость и радиус пузырька на глубине h, $T_0 = 4{,}55$ с — время всплытия по графику, $a = \rho g/p_0 = 0{,}1$ м$^{-1}$.

1. Скорость пузырька. Второй закон Ньютона для пузырька в проекции на вертикаль вверх (рис. 2): масса воздуха ничтожна, поэтому сумма сил равна нулю,

$$\rho g\,\frac{4}{3}\pi r^3 - krv = 0 \quad\Rightarrow\quad v = \frac{4\pi\rho g}{3k}\,r^2.$$

Скорость пропорциональна квадрату радиуса. Силу тяжести воздуха не учитываем: плотность воздуха в $\sim 10^3$ раз меньше плотности воды.

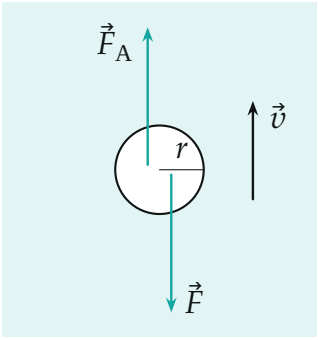


Рис. 2. Силы на пузырёк: сила Архимеда $\vec{F}_A$ вверх, сила сопротивления $\vec{F}$ против скорости. Стрелки равной длины: силы уравновешены.

2. Радиус на глубине h. Закон Бойля — Мариотта для воздуха в пузырьке между дном и глубиной h (масса и температура воздуха постоянны, давление в пузырьке равно давлению воды):

$$(p_0 + \rho g h_0)\,r_0^3 = (p_0 + \rho g h)\,r^3 \quad\Rightarrow\quad r = r_0\left(\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h}\right)^{1/3}.$$

Значит,

$$v(h) = v_{\text{дно}}\left(\frac{p_0+\rho g h_0}{p_0+\rho g h}\right)^{2/3}, \qquad v_{\text{дно}} = \frac{4\pi\rho g}{3k}\,r_0^2.$$

Пункт 1. Глубина озера. Скорость — это наклон графика $h(t)$. Отношение скоростей у поверхности и у дна:

$$\frac{v(0)}{v(h_0)} = \left(\frac{p_0+\rho g h_0}{p_0}\right)^{2/3} = (1+ah_0)^{2/3}.$$

Проведём касательные к графику в начале и в конце (рис. 3). Касательная у дна проходит через $(0;\,1{,}0)$ и пересекает ось t при $t \approx 5{,}8$ с, касательная у поверхности проходит через $(4{,}55;\,0)$ и достигает $h = 1{,}0$ при $t \approx 1{,}3$ с. Наклоны: $1{,}0/5{,}8 \approx 0{,}17$ и $1{,}0/3{,}25 \approx 0{,}31$ усл. ед./с, отношение $\approx 1{,}8$. Отсюда

$$1+ah_0 = 1{,}8^{3/2} \approx 2{,}4, \qquad h_0 = \frac{1{,}4}{a} \approx 14\text{ м}.$$

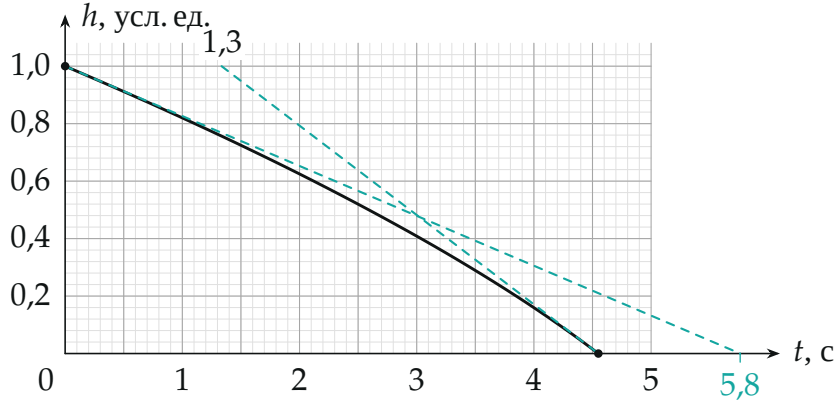


Рис. 3. График из условия (построен по формуле при $h_0 = 14$ м) и касательные у дна и у поверхности. Касательная у поверхности примерно в 1,8 раза круче.

Пункт 2. Пузырёк вдвое меньше. На любой глубине h радиус пузырька пропорционален его радиусу у дна (формула пункта 2), а скорость — квадрату этого радиуса. Пузырёк с $r_1 = r_0/2$ на каждой глубине движется в 4 раза медленнее и всплывает в 4 раза дольше:

$$\tau_1 = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 T_0 = 4 \cdot 4{,}55\ \text{с} \approx 18\ \text{с}.$$

Пункт 3. Озеро глубиной $H = 10$ м. Пузырёк из условия на глубине 10 м (это $10/14 \approx 0{,}71$ усл. ед.) имеет радиус

$$r' = r_0 \left(\frac{1 + ah_0}{1 + aH}\right)^{1/3} = r_0 \left(\frac{2{,}4}{2{,}0}\right)^{1/3},$$

и от этой глубины до поверхности, по графику, идёт $t' \approx 4{,}55 - 1{,}55 = 3{,}0$ с (рис. 4). Наш пузырёк на глубине 10 м имеет радиус $r_0 < r'$ и на каждой следующей глубине радиус в r'/r_0 раз меньше, чем у пузырька из условия, — скорость в $(r'/r_0)^2$ раз меньше:

$$\tau_2 = t' \left(\frac{r'}{r_0}\right)^2 = 3{,}0\ \text{с} \cdot 1{,}2^{2/3} \approx 3{,}4\ \text{с}.$$

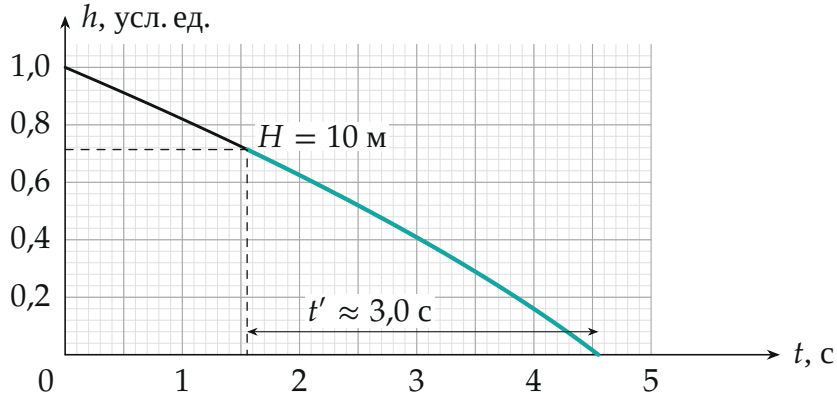


Рис. 4. Участок всплытия пузырька из условия от глубины 10 м до поверхности (бирюзой); на него уходит $t' \approx 3{,}0$ с.

Проверка. Второй способ для пункта 3 — сразу проинтегрировать: время подъёма с глубины D пузырька с радиусом r_0 у дна

$$\tau(D) = \int_0^D \frac{dh}{v(h)} = \frac{3}{5a\,v_{\text{дно}}} \cdot \frac{(1+aD)^{5/3} - 1}{(1+aD)^{2/3}}.$$

Отношение для $D = 10$ м и $D = h_0 = 14$ м:

$$\frac{\tau_2}{T_0} = \frac{(2^{5/3} - 1)/2^{2/3}}{(2{,}4^{5/3} - 1)/2{,}4^{2/3}} = \frac{1{,}890}{2{,}542},$$

$\tau_2 \approx 0{,}744 \cdot 4{,}55 \approx 3{,}4$ с — совпадает. Оценка: последние 10 м пузырёк из условия проходит за 3,0 с; наш пузырёк на тех же глубинах мельче (его не расширяли лишние 4 м подъёма), поэтому ему нужно больше: 3,4 с, но меньше $T_0 = 4{,}55$ с.

Смысл: пузырёк ускоряется при всплытии только из-за расширения, и скорость растёт как $r^2 \propto p^{-2/3}$.

Ответ. 1) $h_0 \approx 14$ м; 2) $\tau_1 \approx 18$ с; 3) $\tau_2 \approx 3{,}4$ с (с точностью чтения графика 3,3–3,4 с).